

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΠΟΛΩΝ ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

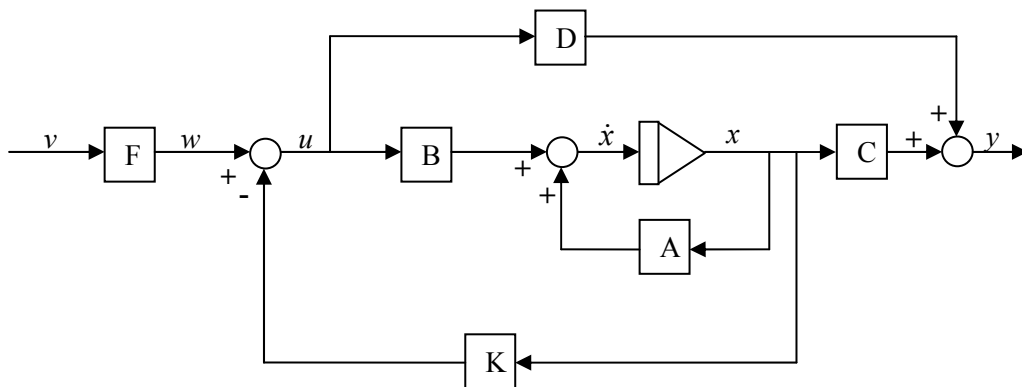
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ας θεωρήσουμε το σύστημα ανοικτού βρόχου που περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης (1.1) και (1.2):

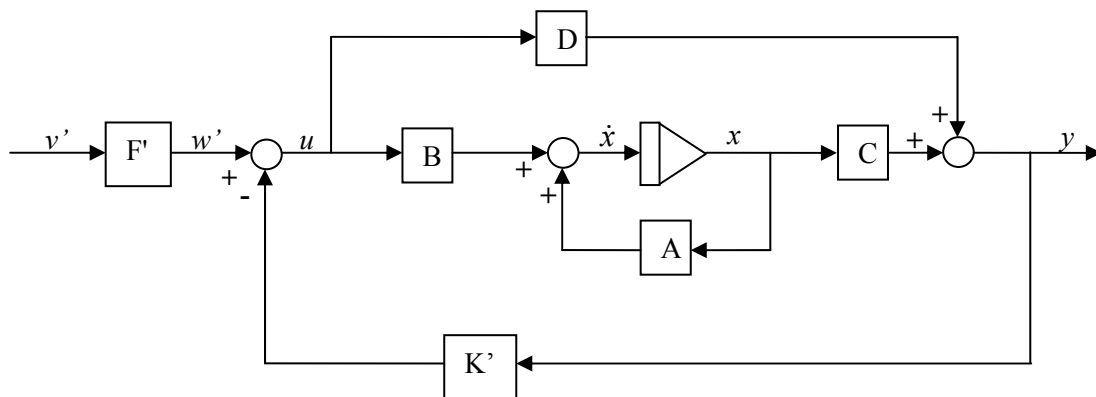
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (1.2)$$

Το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης διαστάσεων $n \times 1$ είναι το \mathbf{x} , \mathbf{u} είναι το διάνυσμα εισόδου $r \times 1$ και \mathbf{y} είναι το διάνυσμα εξόδου $m \times 1$. Αυτό το μέρος του συστήματος θεωρείται ως αμετάβλητο. Τα συστήματα ανατροφοδότησης των μεταβλητών κατάστασης και των μεταβλητών εξόδου φαίνονται στα Σχήματα 1.1 και 1.2 αντίστοιχα.



Σχήμα 1.1 Σύστημα ανατροφοδότησης μεταβλητών κατάστασης.



Σχήμα 1.2 Σύστημα ανατροφοδότησης εξόδου.

Οι πίνακες ανατροφοδότησης \mathbf{K} και \mathbf{K}' είναι διαστάσεων $n \times n$ και $n \times m$ και θεωρούνται σταθεροί. Οι εισόδοι \mathbf{v} και \mathbf{v}' θεωρούνται ως διανύσματα $l \times 1$. Έτσι οι πίνακες ευθείας τροφοδότησης \mathbf{F} και \mathbf{F}' επίσης θεωρούνται ότι είναι σταθεροί και διαστάσεων $n \times l$.

Θα μπορούσε να υποστηριχθεί ότι η ανατροφοδότηση των μεταβλητών κατάστασης είναι μόνο ακαδημαϊκού ενδιαφέροντος επειδή, εξ' ορισμού, οι έξοδοι είναι τα μόνα σήματα που μετρούνται σε πραγματικό χρόνο. Η ανατροφοδότηση όμως των μεταβλητών κατάστασης είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τους ακόλουθους λόγους:

1. Το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης \mathbf{x} περιέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για το σύστημα σε κάθε χρονική στιγμή.
2. Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες όλες οι μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες, δηλαδή αποτελούν μεταβλητές εξόδου. Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν: $\mathbf{C}=\mathbf{I}_n$ και $\mathbf{D}=[0]$.
3. Υπάρχουν αποτελεσματικοί τρόποι για την εκτίμηση ή την ανακατασκευή των μεταβλητών κατάστασης από τις διαθέσιμες εισόδους και εξόδους (παρατηρητές)

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα ανατροφοδότησης μεταβλητών κατάστασης είναι οι (1.1) και (1.2), μαζί με την σχέση:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{v}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (1.3)$$

Ο συνδυασμός τους δίνει:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BF} \cdot \mathbf{v} \quad (1.4)$$

και

$$\mathbf{y} = (\mathbf{C} - \mathbf{DK})\mathbf{x} + \mathbf{DF} \cdot \mathbf{v} \quad (1.5)$$

Οι εξισώσεις (1.4) και (1.5) έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις (1.1) και (1.2). Το ερώτημα που προκύπτει είναι το εξής: «Ποιες μεταβολές μπορούν να επιτευχθούν στα συνολικά χαρακτηριστικά του συστήματος με την κατάλληλη επιλογή των \mathbf{K} και \mathbf{F} ;». Η *ευστάθεια* του συστήματος ανατροφοδότησης μεταβλητών κατάστασης καθώς και οι θέσεις των πόλων του εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Η ρυθμιστικότητα εξαρτάται από τους πίνακες $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ και \mathbf{BF} . Η παρατηρησιμότητα εξαρτάται από τους πίνακες $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ και $\mathbf{C} - \mathbf{DK}$.

Το σύστημα ανατροφοδότησης των μεταβλητών εξόδου περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.1) και (1.2), μαζί με την $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}'\mathbf{v}' - \mathbf{K}'\mathbf{y}$. Για τον λόγο αυτό:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{DF}'\mathbf{v}' - \mathbf{DK}'\mathbf{y}$$

ή

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{F}'\mathbf{v}')$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή λαμβάνουμε: $\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}'(\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{C} \right] \mathbf{x} + \mathbf{B} \left[\mathbf{F}' - \mathbf{K}'(\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{D}\mathbf{F}' \right] \mathbf{v}'$. Βάσει της ταυτότητας για την αντιστροφή πίνακα: $\mathbf{I}_r - \mathbf{K}'(\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{D} \equiv (\mathbf{I}_r + \mathbf{K}'\mathbf{D})^{-1}$, η προηγούμενη σχέση απλοποιείται και γίνεται:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}'(\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{C} \right] \mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{I}_r + \mathbf{K}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{v}' \quad (1.6)$$

Πάλι, οι σχέσεις (1.7) και (1.6) έχουν την ίδια μορφή με τις εξισώσεις (1.1) και (1.2). Οι ιδιότητες της ευστάθειας, ρυθμιστικότητας και παρατηρητικότητας καθορίζονται τώρα από τους πίνακες:

$$\left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}'(\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{C} \right], \mathbf{B}(\mathbf{I}_r + \mathbf{K}'\mathbf{D})^{-1} \mathbf{F}' \text{ και } (\mathbf{I}_m + \mathbf{D}\mathbf{K}')^{-1} \mathbf{C} .$$

Το πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε στη συνέχεια είναι το εξής: Αν δοθεί ένα σύστημα της μορφής που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.1), (1.2) να υπολογίσουμε πίνακα ανατροφοδότησης όλων των μεταβλητών κατάστασης ώστε στο σύστημα κλειστού βρόχου που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.4), (1.5) οι πόλοι να τοποθετηθούν σε σημεία δικής μας επιλογής. Δηλαδή το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Υπολόγισε πίνακα \mathbf{K} ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ να είναι $\Lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$

1.2 1^{ος} ΤΡΟΠΟΣ: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται εύκολα σε συστήματα που περιλαμβάνουν μόνο μια μεταβλητή εκ χειρισμού. Βρίσκουμε την επιθυμητή χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου, δηλαδή $q(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$ και τη χαρακτηριστική εξίσωση που αντιστοιχεί στο σύστημα κλειστού βρόχου (1.4), (1.5), δηλ. $o\rho(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$. Στη συνέχεια εξισώνουμε έναν προς ένα τους όρους των δύο πολυωνύμων.

Παράδειγμα 1:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\Lambda = \{-4 + i, -4 - i, -10\}$$

Η επιθυμητή χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$q(s) = (s + 4 - 3i)(s + 4 + 3i)(s + 10) = s^3 + 18s^2 + 105s + 250$$

Αν ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι

$$\mathbf{K} = [K_1 \ K_2 \ K_3]$$

τότε

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2 \ K_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K_1 & -3 - K_2 & -5 - K_3 \end{bmatrix}$$

$$\rho(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \rho \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 + K_1 & 3 + K_2 & s + 5 + K_3 \end{bmatrix} = s^3 + (5 + K_3)s^2 + (3 + K_2)s + (2 + K_1)$$

Εξισώνοντας τους όρους των δύο πολυωνύμων που έχουν προκύψει, έχουμε:

$$(5 + K_3) = 18 \Rightarrow K_3 = 13$$

$$(3 + K_2) = 105 \Rightarrow K_2 = 102$$

$$(2 + K_1) = 250 \Rightarrow K_1 = 248$$

1.3 2^{ος} ΤΡΟΠΟΣ: ΜΕΘΟΔΟΣ ACKERMANN

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται μόνο σε συστήματα που περιλαμβάνουν μόνο μια μεταβλητή εκ χειρισμού και είναι απλή εφαρμογή του παρακάτω τύπου:

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 1] \mathbf{P}_C^{-1} q(\mathbf{A})$$

Όπου \mathbf{P}_C ο πίνακας ρυθμισιμότητας του συστήματος.

Παράδειγμα 2:

Θα επαναλάβουμε το παραπάνω παράδειγμα με χρήση της μεθοδολογίας Ackermann.

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 1] \left[\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \mathbf{A}^2\mathbf{B} \right]^{-1} q(\mathbf{A}) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & 22 \end{bmatrix}^{-1} (\mathbf{A}^3 + 18\mathbf{A}^2 + 105\mathbf{A} + 250\mathbf{I}_3) =$$

$$= [248 \ 102 \ 13]$$

1.4 3^{ος} ΤΡΟΠΟΣ: ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΠΟΘΕΤΗΣΗΣ ΠΟΛΩΝ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ

Η εξίσωση (1.4) υποδεικνύει ότι οι ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου είναι ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης

$$\Delta'(\lambda) \triangleq \text{ορ}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}) = 0 \quad (1.8)$$

Έχει αποδειχθεί ότι οποιοδήποτε σύνολο επιθυμητών ιδιοτιμών $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας έναν σταθερό πίνακα ανατροφοδότησης \mathbf{K} (του οποίου τα στοιχεία είναι πραγματικοί αριθμοί) αν και μόνο αν το σύστημα ανοικτού βρόχου (\mathbf{A}, \mathbf{B}) είναι ρυθμισιμο.

Η μέθοδος που παρουσιάζεται για τον υπολογισμό του \mathbf{K} αποτελεί μια κατασκευαστική απόδειξη του ότι η ρυθμισιμότητα αποτελεί ικανή συνθήκη για την αυθαίρετη τοποθέτηση των πόλων.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Να προσδιοριστεί ο πίνακας \mathbf{K} έτσι ώστε η εξίσωση (1.8) να ικανοποιείται για κάθε $\lambda_i \in \Lambda$. Η εξίσωση (1.8) επαναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\Delta'(\lambda) \triangleq \text{ορ}\left((\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})[\mathbf{I}_n + (\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}]\right) = \text{ορ}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) \cdot \text{ορ}\left(\mathbf{I}_n + (\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K}\right)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι $\Delta(\lambda) = \text{ορ}(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$. Εφόσον το $(\lambda\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}$ είναι της ίδιας μορφής με τον μετασχηματισμό Laplace του πίνακα μετάβασης ανοικτού βρόχου, αυτός ο όρος συμβολίζεται με $\Phi(\lambda)$.

Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα ανοικτού και κλειστού βρόχου συνδέονται λοιπόν με τη σχέση

$$\Delta'(\lambda) = \Delta(\lambda) \text{ορ}(\mathbf{I}_n + \Phi(\lambda)\mathbf{B}\mathbf{K}) = \Delta(\lambda) \text{ορ}(\mathbf{I}_r + \mathbf{K}\Phi(\lambda)\mathbf{B}) \quad (1.9)$$

Ο πίνακας \mathbf{K} πρέπει να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε $\Delta'(\lambda_i) = 0$ για κάθε $\lambda_i \in \Lambda$. Αν μια επιθυμητή τιμή λ_i είναι επίσης ρίζα του $\Delta'(\lambda)$, η ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{I}_r + \mathbf{K}\Phi(\lambda_i)\mathbf{B}$ θα πρέπει να είναι μηδέν. Αυτό μπορεί να συμβεί με το να μηδενίσουμε μια οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του παραπάνω πίνακα. Η μέθοδος που παρουσιάζεται στο υποκεφάλαιο αυτό μηδενίζει μια στήλη του πίνακα. Συγκεκριμένα, ορίζουμε τη j στήλη του \mathbf{I}_r ως \mathbf{e}_j και την j στήλη του πίνακα $\Psi(\lambda_i) = \Phi(\lambda_i)\mathbf{B}$ ως ψ_j . Τότε το λ_i είναι ρίζα του $\Delta'(\lambda)$ αν ο \mathbf{K} έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση $\mathbf{e}_j + \mathbf{K}\psi_j(\lambda_i) = \mathbf{0}$, αφού με τον τρόπο αυτό η στήλη j του πίνακα $\mathbf{I}_r + \mathbf{K}\Phi(\lambda_i)\mathbf{B}$ μηδενίζεται. Έτσι

$$\mathbf{K}\psi_j(\lambda_i) = -\mathbf{e}_j \quad (1.10)$$

Από μόνη της η εξίσωση (1.10) δεν είναι ικανή να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό του \mathbf{K} . Ωστόσο αν μπορεί βρεθεί μια ανεξάρτητη εξίσωση αυτής της μορφής για κάθε $\lambda_i \in \Lambda$, τότε ο \mathbf{K} μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Αν οι επιθυμητές ιδιοτιμές $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ είναι διακριτές (δηλαδή δεν υπάρχει ιδιοτιμή με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1) θα είναι πάντα δυνατό να βρεθούν n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $\psi_{j_1}(\lambda_1), \psi_{j_2}(\lambda_2), \dots, \psi_{j_n}(\lambda_n)$. Τότε

$$\mathbf{K}[\psi_{j_1}(\lambda_1) \ \psi_{j_2}(\lambda_2) \ \dots \ \psi_{j_n}(\lambda_n)] = -[\mathbf{e}_{j_1} \ \mathbf{e}_{j_2} \ \dots \ \mathbf{e}_{j_n}]$$

$$\text{ή} \quad \mathbf{K} = -[\mathbf{e}_{j_1} \ \mathbf{e}_{j_2} \ \dots \ \mathbf{e}_{j_n}][\psi_{j_1}(\lambda_1) \ \psi_{j_2}(\lambda_2) \ \dots \ \psi_{j_n}(\lambda_n)]^{-1} \quad (1.11)$$

Παράδειγμα 3:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

το οποίο είναι ρυθμίσιμο και ας υπολογίσουμε τον πίνακα ανατροφοδότησης που θα τοποθετήσει τους πόλους κλειστού βρόχου στα σημεία $\Lambda = \{\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4\}$

Υπολογίζουμε αρχικά τον πίνακα $\Phi(\lambda)$ και στη συνέχεια τον πίνακα $\Psi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}{\lambda(\lambda - 3)}$$

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda(\lambda - 3)} \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda(\lambda - 3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\Psi(\lambda)$ έχει μία μόνο στήλη και άρα υπάρχει μια μόνο δυνατότητα επιλογής στήλης για κάθε ιδιοτιμή στο σύνολο Λ

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την τιμή του $\Psi_1(\lambda)$ στα σημεία $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$:

$$\Psi_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -1/6 \end{bmatrix}, \Psi_1(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

Από την εξίσωση 1.11 υπολογίζουμε τον πίνακα ανατροφοδότησης

$$\mathbf{K} = - [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1/9 & 1/14 \\ -1/6 & -1/7 \end{bmatrix}^{-1} = [6 \ 10]$$

Παράδειγμα 4:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Το οποίο είναι ρυθμιζόμενο και ας υπολογίσουμε τον πίνακα ανατροφοδότησης που θα τοποθετήσει τους πόλους κλειστού βρόχου στα σημεία $\Lambda = \{\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4\}$:

Υπολογίζουμε αρχικά τον πίνακα $\Phi(\lambda)$ και στη συνέχεια τον πίνακα $\Psi(\lambda)$:

$$\Phi(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & -2 \\ 0 & \lambda-3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}}{\lambda(\lambda-3)}$$

$$\Psi(\lambda) = \Phi(\lambda)\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $\Psi(\lambda)$ έχει δύο στήλες και άρα υπάρχουν δύο δυνατότητες επιλογής στήλης για κάθε ιδιοτιμή στο σύνολο Λ

$$\Psi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την τιμή των $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda)$ στα σημεία $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -4$:

$$\Psi_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}, \Psi_1(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Psi_2(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1/9 \\ -1/6 \end{bmatrix}, \Psi_2(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

Έχουμε λοιπόν τις εξής δυνατότητες για τον υπολογισμό του πίνακα ανατροφοδότησης:

- 1) Επιλογή της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/14 \\ 0 & -1/7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1.5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- 2) Επιλογή της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -1/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Ο παραπάνω πίνακας δεν μπορεί να υπολογιστεί αφού απαιτεί την αντιστροφή πίνακα με ορίζουσα μηδέν.

- 3) Επιλογή της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & -1/4 \\ -1/6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 8/3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- 4) Επιλογή της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 1/14 \\ -1/6 & -1/7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Θα δούμε στη συνέχεια τι συμβαίνει όταν θέλουμε να τοποθετήσουμε μια ιδιοτιμή στο σύστημα

κλειστού βρόχου με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1. Αν ο αριθμός των μεταβλητών εισόδου είναι

αρκετός τότε δε χρειάζεται να κάνουμε καμία μετατροπή στη μεθοδολογία που έχουμε παρουσιάσει ως τώρα.

Παράδειγμα 5:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Το οποίο είναι ρυθμίσιμο και ας υπολογίσουμε τον πίνακα ανατροφοδότησης που θα τοποθετήσει τους πόλους κλειστού βρόχου στα σημεία $\Lambda = \{\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -4\}$

Το σύστημα είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό του παραδείγματος και επομένως ο αντίστοιχος πίνακας $\Psi(\lambda)$ είναι

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Στον οποίο αντιστοιχούν οι στήλες

$$\Psi_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 1/\lambda \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε την τιμή των $\Psi_1(\lambda), \Psi_2(\lambda)$ στα σημεία $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -4$:

$$\Psi_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_1(\lambda_2) = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_2(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια στήλη του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τις δύο ιδιοτιμές αφού θα απαιτηθεί στη συνέχεια η αντιστροφή πίνακα με μηδενική ορίζουσα. Έχουμε λοιπόν δύο επιλογές:

- 1) Επιλογή της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/4 & 1/14 \\ 0 & -1/7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- 2) Επιλογή της δεύτερης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για την πρώτη ιδιοτιμή και της πρώτης στήλης του πίνακα $\Psi(\lambda)$ για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Τότε ο πίνακας ανατροφοδότησης είναι:

$$\mathbf{K} = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/14 & -1/4 \\ -1/7 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι και οι δύο επιλογές οδήγησαν στον υπολογισμό του ίδιου ακριβώς πίνακα ανατροφοδότησης.

Παράδειγμα 6:

Ας θεωρήσουμε το σύστημα:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

Το οποίο είναι ρυθμίσιμο και ας υπολογίσουμε τον πίνακα ανατροφοδότησης που θα τοποθετήσει τους πόλους κλειστού βρόχου στα σημεία $\Lambda = \{\lambda_1 = -4, \lambda_2 = -4\}$

Το σύστημα είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό του παραδείγματος και επομένως ο αντίστοιχος πίνακας $\Psi(\lambda)$ είναι

$$\Psi(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Με μοναδική στήλη την

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda-3)} \begin{bmatrix} 2 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Επομένως έχουμε:

$$\Psi_1(\lambda_1) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}, \Psi_1(\lambda_2) = \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μοναδική στήλη για τοποθέτηση δύο ίδιων ιδιοτιμών με τη μέθοδο που έχει παρουσιαστεί ως τώρα αφού απαιτείται η αντιστροφή πίνακα που έχει μηδενική ορίζουσα.

Μπορούμε μόνο να γράψουμε:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_1(\lambda_1) = -1 \Rightarrow \mathbf{K} \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix} = -1$$

Στην περίπτωση αυτή χρειάζεται μια τροποποίηση της μεθοδολογίας. Αν επιθυμούμε το λ_i να έχει αλγεβρική πολλαπλότητα m_i , τότε $\left. \frac{d^r \Delta'(\lambda)}{d\lambda^r} \right|_{\lambda=\lambda_i} = 0$ για $r = 1, 2, \dots, m_i-1$. Σύμφωνα με τον κανόνα παραγωγισις μιας ορίζουσας

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta'(\lambda)}{d\lambda} &= \left\{ \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right\} \left| \mathbf{I}_r + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}(\lambda)\mathbf{B} \right| + \left| \mathbf{K} \frac{d\boldsymbol{\psi}_1}{d\lambda} : \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_2 : \dots : \mathbf{e}_r + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_r \right| \Delta(\lambda) \\ &+ \left| \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_1 : \mathbf{K} \frac{d\boldsymbol{\psi}_2}{d\lambda} : \dots : \mathbf{e}_r + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_r \right| \Delta(\lambda) + \dots \\ &\left| \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_1 : \mathbf{e}_2 + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_2 : \dots : \mathbf{K} \frac{d\boldsymbol{\psi}_r}{d\lambda} \right| \Delta(\lambda) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Υποθέτουμε ότι $\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}_j(\lambda_i) = -\mathbf{e}_j$. Τότε όλοι οι όροι της (1.12) έχουν μια μηδενική στήλη, εκτός από αυτόν που περιέχει το $\mathbf{K}d\boldsymbol{\psi}_j/d\lambda$. Έτσι μια επιπλέον ανεξάρτητη εξίσωση για να αναγκάζει το $\Delta'(\lambda_i) = 0$ είναι η

$$\mathbf{K} \frac{d\boldsymbol{\psi}_j}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \quad (1.13)$$

Αν είναι απαραίτητο μπορούν να χρησιμοποιηθούν και παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης. Με τον τρόπο αυτό μπορούν πάντα να βρεθεί ένα σύνολο από n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, είτε $\boldsymbol{\psi}_{j_i}(\lambda_i)$, είτε παραγώγους.

Συνέχεια παραδείγματος 6:

Από την μέχρι τώρα πορεία έχει προκύψει:

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} 1/14 \\ -1/7 \end{bmatrix} = -1$$

Αρα χρειαζόμαστε μια ακόμη ανεξάρτητη αλγεβρική εξίσωση για τον υπολογισμό του \mathbf{K} .

Αυτή προκύπτει από την εξίσωση 1.13:

$$\mathbf{K} \frac{d\psi_1(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_1} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \begin{bmatrix} \frac{-4\lambda+6}{(\lambda^2-3\lambda)^2} \\ -\lambda^2 \\ \frac{(\lambda^2-3\lambda)^2}{(\lambda^2-3\lambda)^2} \end{bmatrix} \Big|_{\lambda=-4} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \begin{bmatrix} 22/784 \\ -16/784 \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} 1/14 & 22/784 \\ -1/7 & -16/784 \end{bmatrix} = [-1 \quad 0] \Rightarrow \mathbf{K} = [-1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/14 & 22/784 \\ -1/7 & -16/784 \end{bmatrix}^{-1} = [8 \quad 11]$$