ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ "ΡΥΘΜΙΣΗ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ"

Εξέταση Σεπτεμβρίου 2012

---

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ**

**Για την επίλυση των θεμάτων θα χρειαστείτε τα εξής δεδομένα που προκύπτουν από τον αριθμό των γραμμάτων του επωνύμου σας και από τον αριθμό μητρώου.**
**$\Omega$= αριθμός των γραμμάτων του ονόματός σας.**
**$\Psi$= τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου+3.**

## ΘΕΜΑ 1° (60%):

Θεωρήστε έναν αντιδραστήρα συνεχούς λειτουργίας και πλήρους ανάμιξης (CSTR) που χρησιμοποιείται σε καταλυτική αντίδραση αέριας φάσης της οποίας η στοιχειομετρία είναι:

$$A \rightarrow B.$$

Στον αντιδραστήρα εισέρχεται ένα ρεύμα εισόδου που περιέχει μόνο συστατικό A με ρυθμό $F_i$ (m$^3$/min) και συγκέντρωση $C_{A,in}$ (moles/ m$^3$) και από αυτόν εξέρχεται ένα ρεύμα εξόδου με τον ίδιο ρυθμό $F_i$ (και τα δύο ρεύματα βρίσκονται σε αέρια κατάσταση). Οι μεταβλητές $F_i$,$C_{A,in}$ μεταβάλλονται με το χρόνο, σε αντίθεση με τον όγκο του αερίου στον αντιδραστήρα που παραμένει σταθερός και ίσος με $V$(m$^3$) λόγω της αέριας φάσης στην οποία πραγματοποιείται η αντίδραση. Ο ρυθμός της αντίδρασης δίνεται από τη σχέση:

$$r_A = -k\frac{C_A}{1+K_A C_A}\left(\frac{moles}{\min m^3}\right)$$

όπου $k$, $K_A$ είναι σταθερές και $C_A$ (moles/ m$^3$) είναι η συγκέντρωση του συστατικού A στο εσωτερικό του αντιδραστήρα (η οποία συμπίπτει λόγω τέλειας ανάδευσης με τη συγκέντρωση στο ρεύμα εξόδου).

α) Αναπτύξτε διαφορικές εξισώσεις που να περιγράφουν τη δυναμική συμπεριφορά των δύο μεταβλητών εξόδου $C_A$ ,$C_B$ συναρτήσει των μεταβλητών εισόδου ($F_i$,$C_{A,in}$). $C_B$ (moles/ m$^3$) είναι η συγκέντρωση του συστατικού B στο εσωτερικό του αντιδραστήρα και στο ρεύμα εξόδου.

β) Γραμμικοποιήστε τις διαφορικές εξισώσεις γύρω από τη μόνιμη κατάσταση που αντιστοιχεί στις ακόλουθες τιμές μεταβλητών και παραμέτρων.

$C_{A,in}=\Omega$, $F_i=1$, $V=1$, $k=2$, $K_A=1$.

(Υπενθυμίζεται ότι Ω είναι ο αριθμός των γραμμάτων του ονόματός σας)

<u>Για όλα τα υπόλοιπα ερωτήματα χρησιμοποιήστε το γραμμικοποιημένο σύστημα</u>

γ) Προσδιορίστε τις συναρτήσεις μεταφοράς ανάμεσα στις μεταβλητές εξόδου και εισόδου.

δ) Αν είχατε τη δυνατότητα επιλογής της τιμής της παραμέτρου $k$, υπολογίστε την τιμή που θα υποδιπλασίαζε τη σταθερά χρόνου του συστήματος ανοικτού βρόχου της συνάρτησης μεταφοράς ανάμεσα στις μεταβλητές $C_A$ και $C_{A,in}$.

ε) Θεωρώντας τη συγκέντρωση $C_{A,in}$ ως διαταραχή και τη ροή $F_i$ ως μεταβλητή εκ χειρισμού σχεδιάστε ρυθμιστή της συγκέντρωσης $C_A$, που να επιτυγχάνει μηδενικό στατικό σφάλμα σε περίπτωση βηματικής επιβολής στην επιθυμητή τιμή και λόγο απόσβεσης ίσο με 1.2. Θεωρήστε αμελητέες τις δυναμικές του αισθητήρα και του στοιχείου τελικής ρύθμισης.

στ) Το σύστημα κλειστού βρόχου ξεκινά σε χρόνο 0 από το σημείο ισορροπίας που υπολογίσατε στο ερώτημα β και δίνεται μοναδιαία βηματική επιβολή στη διαταραχή $C_{A,in}$ χωρίς να συμβαίνει οποιαδήποτε μεταβολή στην επιθυμητή τιμή. Υπολογίστε την τιμή που θα λάβει η ρυθμιζόμενη μεταβλητή $C_A$ όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

ζ) Εξετάστε αν ο ρυθμιστής που σχεδιάσατε στο ερώτημα δ εγγυάται την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, στην περίπτωση που η δυναμική του αισθητήρα δεν είναι πλέον αμελητέα αλλά περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς

$$G_v(s) = \frac{1}{s+1}$$

Θεωρήστε ότι η δυναμική του στοιχείου τελικής ρύθμισης παραμένει αμελητέα.

**ΘΕΜΑ 2ο (20%):**

Δίνεται σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \left(\frac{1}{\Omega s+1}\right)^3$$

(Υπενθυμίζεται ότι Ω είναι ο αριθμός των γραμμάτων του ονόματός σας)

Το σύστημα ξεκινά από ισορροπία και τη χρονική στιγμή 0 δίνεται στην είσοδο η επιβολή:

$$u(t) = 5\sin(0.2t) + 10\sin(t)$$

Υπολογίστε τον τρόπο με τον οποίο θα μεταβάλλεται ως συνάρτηση του χρόνου η μεταβλητή εξόδου $y(t)$ όταν ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

**ΘΕΜΑ 3ο (20%):**

Έστω ότι η χαρακτηριστική εξίσωση ενός συστήματος δίνεται ως συνάρτηση της παραμέτρου Κ από το πολυώνυμο:

$$s^3 + 4s^2 + (5+K)s + K\Psi = 0$$

Προσδιορίστε το εύρος τιμών του Κ που εξασφαλίζει ότι το πραγματικό μέρος όλων των ριζών του πολυωνύμου είναι μικρότερο του $-1$ (Υπενθυμίζεται ότι Ψ είναι ο αριθμός του τελευταίου ψηφίου του αριθμού μητρώου +3)

a) $V\frac{dC_A}{dt} = F_i C_{A,in} - F_i C_A - K\frac{C_A}{1+K_A C_A}V$

$V\frac{dC_B}{dt} = -F_i C_B + K\frac{C_A}{1+K_A C_A}V$

b) $\Omega - C_{A,s} - 2\frac{C_{A,s}}{1+C_{A,s}} = 0 \Rightarrow \Omega + C_{A,s}\Omega - C_{A,s} - C_{A,s}^2 - 2C_{A,s} = 0$

$C_{A,s}^2 - C_{A,s}(\Omega-3) - \Omega = 0$

$C_{A,s} = \frac{\Omega - 3 \pm \sqrt{(\Omega-3)^2 + 4\Omega}}{2}$, for $\Omega = 5$, $C_{A,s} = \frac{2\pm\sqrt{24}}{2} \Rightarrow C_{A,s} = 3.45\ \frac{mole}{m^3}$

$C_{B,s} = \frac{2C_{A,s}}{1+C_{A,s}} = \frac{2\cdot 3.45}{1+3.45} = 1.55\ \frac{moles}{m^3}$

$V\frac{dC_A}{dt} \approx F_i|_s \bar{C}_{A,in}(t) + (C_{A,in} - C_A)|_s \bar{F}_i(t)$
$+ \left(-F_i + K\cdot V\frac{1}{(1+K_A C_A)^2}\right)\Big|_s \bar{C}_A(t)$

$= \bar{C}_{A,in}(t) + (5-3.45)\bar{F}_i(t) + (-1-0.05K)\bar{C}_A(t)$

$V\frac{dC_B}{dt} = -F_i|_s \bar{C}_B(t) + (-C_B)|_s \bar{F}_i(t) + K\cdot V\left(\frac{1}{1+K_A C_A}\right)^2\Big|_s \bar{C}_A(t)$

$= -\bar{C}_B(t) - 1.55\bar{F}_i(t) + K\cdot 0.05\bar{C}_A(t)$

γ) $V_s \bar{C}_A(s) = \bar{C}_{A,in}(s) + 1.55\,\bar{F}_i(s) - (1+0.05K)\,\bar{C}_A(s)$

$$\bar{C}_A(s) = \frac{\bar{C}_{A,in}(s)}{s+1+0.05K} + \frac{1.55}{s+1+0.05K}\,\bar{F}_i(s)$$

$$s\bar{C}_B(s) = -\bar{C}_B(s) - 1.55\bar{F}_i(s) + 0.05K\cdot\bar{C}_A(s)$$

$$\bar{C}_B(s) = \frac{-1.55}{s+1}\,\bar{F}_i(s) + \frac{0.05K}{s+1}\,\bar{C}_A(s)$$

$$= -\frac{1.55}{s+1}\,\bar{F}_i(s) + \frac{0.05K}{s+1}\left[\frac{\bar{C}_{A,in}(s)}{s+1+0.05K} + \frac{1.55}{s+1+0.05K}\,\bar{F}_i(s)\right]$$

$$= \left[-\frac{1.55}{s+1} + 0.05K\,\frac{1.55}{(s+1)(s+1+0.05K)}\right]\bar{F}_i(s) + \frac{0.05K}{(s+1)(s+1+0.05K)}\,\bar{C}_{A,in}(s)$$

δ) $$\frac{\bar{C}_A(s)}{\bar{C}_{A,in}(s)} = \frac{1}{s+1+0.05K} = \frac{\frac{1}{1+0.05K}}{\frac{1}{1+0.05K}\,s+1}$$

Σύστημα πρώτης τάξης με καθυστέρηση $T = \frac{1}{1+0.05K} = \frac{1}{1+0.1} = \frac{1}{1.1}$

Για να υποδιπλασιαστεί το $T$, θα πρέπει $\frac{0.5}{1.1} = \frac{1}{1+0.05K} \Rightarrow K = 24$

ε) Η συνάρτηση μεταφοράς που περιγράφει το προς ρύθμιση σύστημα είναι:

$$\frac{\bar{C}_A(s)}{\bar{F}_c(s)} = \frac{1.55}{s+1.1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε PI ρυθμιστή (το I στοιχείο υποχρεωτικό λόγω της απαίτησης για μηδενικό στατικό σφάλμα)

Χαρακτηριστική εξίσωση:

$$\left(K_1 + \frac{K_2}{s}\right)\frac{1.55}{s+1.1} = -1 \Rightarrow (K_1 s + K_2)\cdot 1{,}55 + s^2 + 1.1s = 0$$

$$s^2 + (1.1 + 1{,}55K_1)s + K_2 \cdot 1.55 = 0$$

Έστω $K_2 = 1$. Θα υπολογίσουμε $K_1$ που να επιτυγχάνει

λόγο απόσβεσης $\zeta = 1.2$

$$\frac{s^2}{1.55} + \frac{1.1 + 1.55K_1}{1.55}s + 1 = 0$$

$$\tau^2 = \frac{1}{1.55} \Rightarrow \tau = 0.8 \qquad 2\zeta \cdot 0.8 = \frac{1.1 + 1.55K_1}{1.55} \Rightarrow K_1 = 1.21$$

στ) $\bar{C}_{A,in}(s) = \frac{1}{s}$

$\lim_{t\to\infty} \bar{C}_A(t) = 0$ γιατί έχουμε ολοκληρωτική δράση και το σύστημα είναι ευσταθές

Αποδεικνύεται και με ΘΤΤ.

γ) Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\left(1.21+\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1.55}{s+1.1}\right)\frac{1}{s+1}=-1$$

$$(1.21s+1)\cdot 1.55+s(s+1.1)(s+1)=0$$

$$1.88s+1.55+s^3+2.1s^2+1.1s=0$$

$$s^3+2.1s^2+2.98s+1.55$$

Hurwitz

$$\begin{bmatrix} 2.1 & 1.55 & 0 \\ 1 & 2.98 & 0 \\ 0 & 2.1 & 1.55 \end{bmatrix}$$

Όλες οι ελάσσονες ορίζουσες θετικές, άρα το σύστημα είναι ευσταθές.

ΘΕΜΑ 2ο

$G(j\omega) = \frac{1}{(\Omega j\omega+1)^3}$ $|G(j\omega)| = \frac{1}{(\Omega^2\omega^2+1)^{3/2}}$ , $\angle G(j\omega) = -3\tan^{-1}(\Omega\omega)$

Έστω $\Omega=5$ , Για $\omega = 0.2$ rad/s

$|G(j\omega)| = \frac{1}{2^{3/2}} = 0.35$ , $\angle G(j\omega) = -3\tan^{-1}(1) = -135^\circ$

Αν $u(t) = 5\sin(0.2t)$ , $y(t) = 5 \cdot 0.35 \sin(0.2t - 135^\circ) = 1.75 \sin(0.2t - 135^\circ)$

Για $\omega = 1$ rad/s

$|G(j\omega)| = \frac{1}{26^{3/2}} = 0.00754$ , $\angle G(j\omega) = -3\tan^{-1}(5) = -236^\circ$

Αν $u(t) = 10\sin t$ , $y(t) = 10 \cdot 0.00754 \sin(t - 236^\circ) = 0.0754 \sin(t - 236^\circ)$

Λόγω της αρχής της επαλληλίας

$y(t) = 1.75\sin(0.2t - 135^\circ) + 0.0754\sin(t - 236^\circ)$

ΘΕΜΑ 3ο Έστω $p = s+1 \Rightarrow s = p-1$

Αντικαθιστούμε στο πολυώνυμο $(p-1)^3 + 4(p-1)^2 + (5+K)(p-1) + \Psi K = 0$

$\Rightarrow p^3 + p^2 + Kp - 2 + K(\Psi - 1)$

Hurwitz $\begin{bmatrix} 1 & -2+K(\Psi-1) & 0 \\ 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & -2+K(\Psi-1) \end{bmatrix}$

Θέλουμε $K + 2 - K(\Psi - 1) > 0 \Rightarrow K < \frac{2}{\Psi - 2}$

$-2 + K(\Psi - 1) > 0 \Rightarrow K > \frac{2}{\Psi - 1}$

Άρα $\boxed{\frac{2}{\Psi - 1} < K < \frac{2}{\Psi - 2}}$