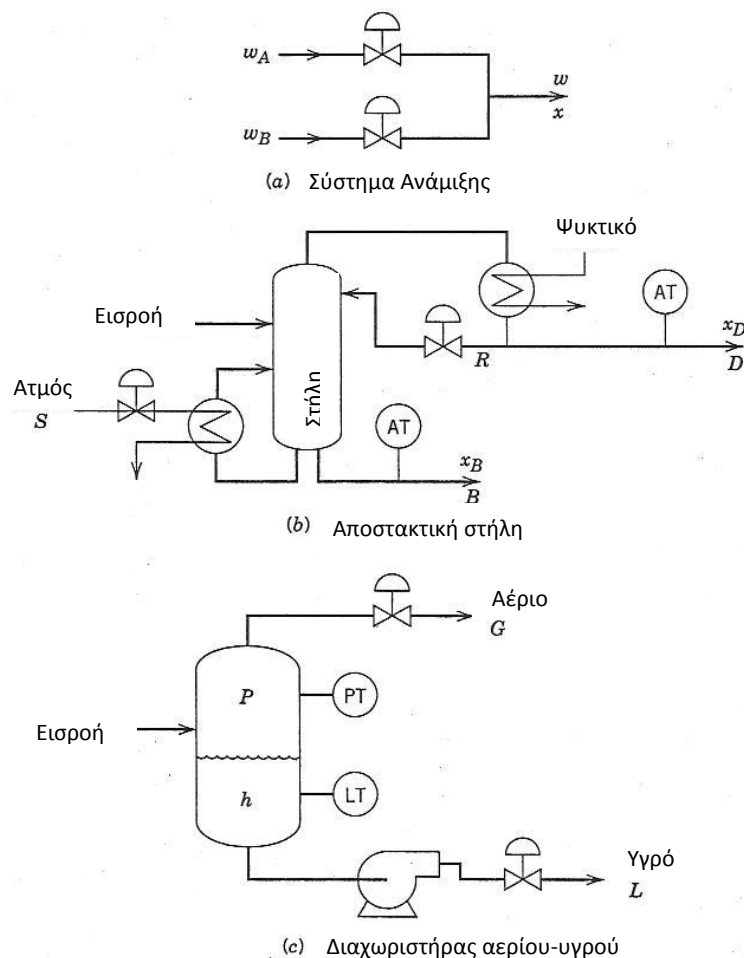


Ρύθμιση Πολυμεταβλητών Συστημάτων

Τα προβλήματα ρύθμισης που περιλαμβάνουν μόνο μια ρυθμιζόμενη μεταβλητή και μια μεταβλητή εκ χειρισμού αναφέρονται ως προβλήματα μιας εισόδου-μιας εξόδου (single input-single output, SISO) ή προβλήματα απλού βρόχου. Αλλά σε πολλά πρακτικά προβλήματα ρύθμισης πρέπει να ρυθμιστούν πολλές μεταβλητές, ενώ είναι δυνατός ο χειρισμός πολλών μεταβλητών εισόδου. Αυτά τα προβλήματα αναφέρονται ως προβλήματα πολλαπλών εισόδων- πολλαπλών εξόδων (multiple input-multiple output, MIMO).

Στο σχήμα 1 παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα που αναδεικνύουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συστημάτων αυτών, την παρουσία αλληλεπιδράσεων, ότι δηλαδή μια μεταβλητή εκ χειρισμού μπορεί να επηρεάσει περισσότερες από μία ρυθμιζόμενες μεταβλητές. Ας εξετάσουμε το σύστημα ανάμιξης του σχήματος 1a. Τα δυο ρεύματα, που περιέχουν τις ουσίες A και B αντίστοιχα αναμιγνύονται για να παραχθεί ένα ρεύμα προϊόντος με ρυθμό ροής μάζας w και συγκέντρωση x , που αντιπροσωπεύει το κλάσμα μάζας του A. Η μεταβολή οποιουδήποτε ρυθμού ροής w_A ή w_B επηρεάζει και τον ρυθμό ροής w και την συγκέντρωση x .



Σχήμα 1. Παραδείγματα πολυμεταβλητών συστημάτων.

Ομοίως, για την αποστακτική στήλη του σχήματος 1b, μεταβάλλοντας είτε τον ρυθμό αναρροής R ή την ροή του ατμού S θα επηρεαστεί τόσο η συγκέντρωση του αποστάγματος x_D , όσο και η συγκέντρωση του προϊόντος του πυθμένα, x_B . Για τον διαχωριστήρα αερίου-υγρού του σχήματος 18.1c, η μεταβολή του ρυθμού ροής των αερίων G , θα έχει άμεση επίδραση στην πίεση P και μια πιο αργή, έμμεση επίδραση στο επίπεδο του υγρού h επειδή η αλλαγή της πίεσης στο δοχείο θα έχει την τάση να επηρεάσει τον ρυθμό ροής του υγρού, L , και επομένως να επηρεάζει και τη στάθμη του υγρού h .

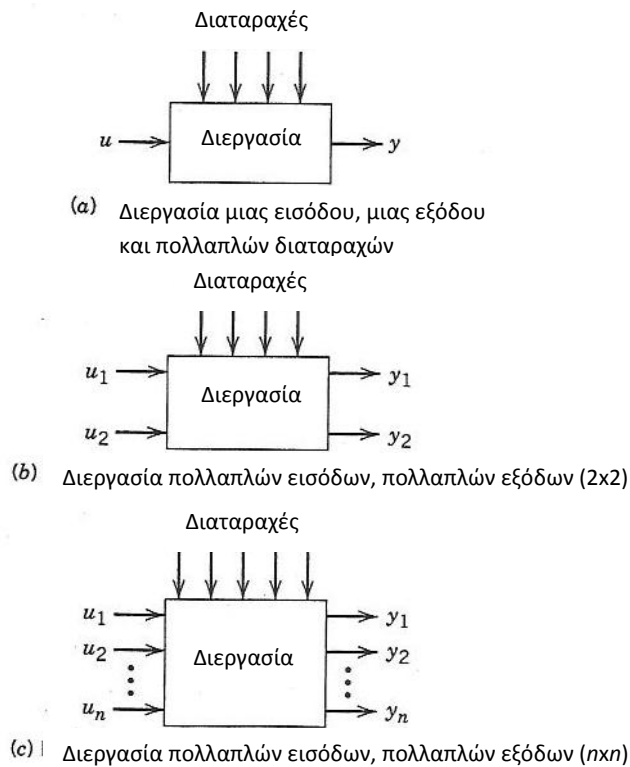
Όταν υπάρχουν σημαντικές αλληλεπιδράσεις στην διεργασία, η επιλογή της πιο αποτελεσματικής διάταξης ρύθμισης μπορεί να μην είναι προφανής. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι στο πρόβλημα ανάμιξης πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μια συμβατική στρατηγική ρύθμισης, αποτελούμενη από δυο ρυθμιστές PI. Αυτό το σύστημα ρύθμισης, το οποίο αναφέρεται ως σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων επειδή χρησιμοποιεί δυο ρυθμιστές ανατροφοδότησης ενός βρόχου, εγείρει πολλά ερωτήματα: Θα έπρεπε ο ρυθμιστής της συγκέντρωσης να ελέγχει τον ρυθμό ροής w_A και ο ρυθμιστής ροής τον ρυθμό ροής w_B , ή αντίστροφα; Πως μπορούμε να καθορίσουμε ποια από τις δυο διατάξεις ρύθμισης θα είναι πιο αποτελεσματική; Οι αλληλεπιδράσεις των βρόχων ρύθμισης που προκαλούνται από τις αλληλεπιδράσεις της διεργασίας θα προκαλέσουν προβλήματα;

Στη συνέχεια θα μελετηθούν τεχνικές για την επιλογή μιας κατάλληλης διάταξης ρύθμισης πολλαπλών βρόχων. Αν οι αλληλεπιδράσεις των διεργασιών είναι σημαντικές, ακόμα και το καλύτερο σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων μπορεί να μην παρέχει ικανοποιητική ρύθμιση και έλεγχο της διεργασίας. Στις καταστάσεις αυτές υπάρχουν κίνητρα για την επιλογή προχωρημένων τεχνικών ρύθμισης πολλαπλών μεταβλητών όπως η ρύθμιση προβλεπτικού μοντέλου.

1. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΒΡΟΧΩΝ ΡΥΘΜΙΣΗΣ

Μια σχηματική αναπαράσταση διαφόρων εφαρμογών ρύθμισης SISO και MIMO φαίνεται στο σχήμα 2. Για ευκολία, έχει υποθεθεί ότι ο αριθμός των εκ χειρισμού μεταβλητών είναι ίσος με τον αριθμό των ρυθμιζόμενων μεταβλητών. Αυτό επιτρέπει τον σχηματισμό ζευγών μιας μεμονωμένης μεταβλητής εκ χειρισμού και μιας μεμονωμένης ρυθμιζόμενης μεταβλητής μέσω ενός ρυθμιστή ανατροφοδότησης. Πιο γενικές στρατηγικές ρύθμισης δεν κάνουν τέτοιους περιορισμούς. Τα προβλήματα ρύθμισης MIMO είναι εκ φύσεως πιο περίπλοκα απ' ό,τι τα προβλήματα ρύθμισης SISO επειδή οι αλληλεπιδράσεις της διεργασίας λαμβάνουν χώρα ανάμεσα σε μεταβλητές εκ χειρισμού και ρυθμιζόμενες μεταβλητές. Γενικά, μια αλλαγή σε μια μεταβλητή εκ χειρισμού, για παράδειγμα την u_1 , θα επηρεάσει όλες τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές y_1, y_2, \dots, y_n . Εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων της διεργασίας, η επιλογή των καλύτερων ζευγών μεταβλητών εκ χειρισμού και ρυθμιζόμενων μεταβλητών για

ένα σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων μπορεί να αποτελέσει ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα. Ειδικά, για ένα πρόβλημα ρύθμισης με n ρυθμιζόμενες μεταβλητές και n μεταβλητές εκ χειρισμού, υπάρχουν $n!$ πιθανές διατάξεις ρύθμισης.



Σχήμα 2. Προβλήματα ρύθμισης SISO και MIMO.

1.1 Ανάλυση διαγράμματος ροής

Θεωρείστε το πρόβλημα ρύθμισης του σχήματος 2b. Επειδή υπάρχουν δυο ρυθμιζόμενες μεταβλητές και δυο μεταβλητές εκ χειρισμού, είναι απαραίτητες τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς για να αποτυπωθεί πλήρως η δυναμική του συστήματος:

$$\begin{aligned} \frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = G_{p11}(s) & \quad \frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = G_{p12}(s) \\ \frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_{p21}(s) & \quad \frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = G_{p22}(s) \end{aligned} \quad (1)$$

Οι συναρτήσεις μεταφοράς στην εξίσωση 1 μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να καθοριστεί η επίδραση μιας αλλαγής της U_1 ή της U_2 στις Y_1 και Y_2 . Λόγω της γραμμικότητας των μοντέλων, ζοι ταυτόχρονες αλλαγές στις U_1 και U_2 έχουν μια προσθετική επίδραση σε κάθε ρυθμιζόμενη μεταβλητή:

$$Y_1(s) = G_{p11}(s)U_1(s) + G_{p12}(s)U_2(s) \quad (2)$$

$$Y_2(s) = G_{p21}(s)U_1(s) + G_{p22}(s)U_2(s) \quad (3)$$

Αυτές οι σχέσεις εισόδου-εξόδου μπορούν επίσης να εκφραστούν με μορφή πινάκων και διανυσμάτων ως εξής:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_p(s)\mathbf{U}(s) \quad (4)$$

όπου $\mathbf{Y}(s)$ και $\mathbf{U}(s)$ είναι διανύσματα με δυο στοιχεία,

$$\mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad (5)$$

και $\mathbf{G}_p(s)$ είναι ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς της διεργασίας,

$$\mathbf{G}_p(s) = \begin{bmatrix} G_{p11}(s) & G_{p12}(s) \\ G_{p21}(s) & G_{p22}(s) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς μόνιμης κατάστασης ($s=0$) ονομάζεται *πίνακας ενίσχυσης* της διεργασίας και συμβολίζεται με \mathbf{K} .

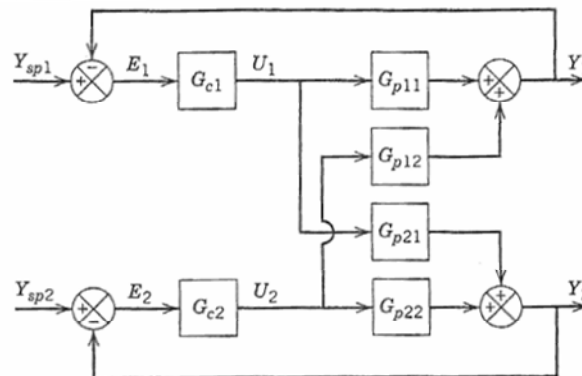
Υποθέστε ότι πρόκειται να χρησιμοποιηθεί ένα σύνηθες σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων αποτελούμενο από δυο ρυθμιστές ανατροφοδότησης. Οι δυο πιθανές διατάξεις ρύθμισης φαίνονται στο σχήμα 3. Στο σύστημα (a), η Y_1 ρυθμίζεται μεταβάλλοντας την U_1 , ενώ η Y_2 ρυθμίζεται μεταβάλλοντας την U_2 . Επομένως, επομένως αυτή η διάταξη θα αναφέρεται ως διάταξη 1-1/2-2. Η εναλλακτική στρατηγική είναι να γίνει σύζευξη της Y_1 με την U_2 και της Y_2 με την U_1 , το οποίο είναι η διάταξη ρύθμισης 1-2/2-1 που φαίνεται στο σχήμα 3(b). Σημειώστε ότι αυτά τα διαγράμματα ροής έχουν απλοποιηθεί παραλείποντας τις συναρτήσεις μεταφοράς για τα τελικά στοιχεία ρύθμισης και τους αισθητήρες. Επίσης, οι διαταραχές έχουν παραληφθεί.

Το σχήμα 3 δείχνει ότι οι αλληλεπιδράσεις της διεργασίας μπορούν να προκαλέσουν ανεπιθύμητες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στους βρόχους ρύθμισης. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι χρησιμοποιείται η διάταξη ρύθμισης 1-1/2-2 και μια διαταραχή απομακρύνει την Y_1 από το επιθυμητό της σημείο, το Y_{sp1} . Τότε λαμβάνουν χώρα τα ακόλουθα:

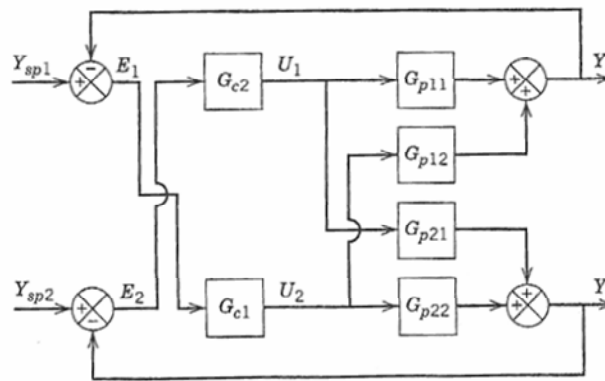
1. Ο ρυθμιστής για τον βρόχο 1 (G_{c1}) προσαρμόζει την τιμή της U_1 έτσι ώστε να αναγκάσει την Y_1 να επανέλθει στο επιθυμητό σημείο. Ωστόσο, η U_1 επηρεάζει και την Y_2 μέσω της συνάρτησης μεταφοράς G_{p21} .
2. Εφόσον η Y_2 έχει μεταβληθεί, ο ρυθμιστής του βρόχου 2 (G_{c2}) προσαρμόζει την τιμή της U_2 έτσι ώστε να επαναφέρει την Y_2 στο επιθυμητό σημείο Y_{2sp} . Ωστόσο, η μεταβολή της U_2 επηρεάζει ταυτόχρονα την Y_1 μέσω της συνάρτησης μεταφοράς G_{p12} .

Αυτές οι ενέργειες των ρυθμιστών εξελίσσονται ταυτόχρονα μέχρι να επιτευχθεί μια νέα μόνιμη κατάσταση. Σημειώστε ότι η αρχική αλλαγή στην U_1 έχει δυο επιδράσεις στην Y_1 : μια *άμεση* επίδραση (1) και μια *έμμεση* επίδραση μέσω των αλληλεπιδράσεων των βρόχων ρύθμισης (2). Παρόλο που διευκολύνει την κατανόηση η αντιμετώπιση αυτής της δυναμικής συμπεριφοράς σαν μια ακολουθία

γεγονότων, στην πράξη οι μεταβλητές της διεργασίας θα αλλάζουν διαρκώς και ταυτόχρονα.



(a) Σύζευξη ρυθμιστών 1-1/2-2



(b) Σύζευξη ρυθμιστών 1-2/2-1

Σχήμα 3. Διαγράμματα ροής για συστήματα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων 2x2.

Οι αλληλεπιδράσεις των βρόχων ρύθμισης σε ένα πρόβλημα ρύθμισης 2x2 προκύπτουν από την παρουσία ενός τρίτου βρόχου ανατροφοδότησης που περιέχει τους δυο ρυθμιστές και δυο από τις τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς της διεργασίας (Shinskey, 1996). Επομένως, για την διάταξη 1-1/2-2 αυτός ο *κρυφός βρόχος ανατροφοδότησης* περιέχει τα: G_{c1} , G_{c2} , G_{p12} , και G_{p21} , όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Ένας παρόμοιος κρυφός βρόχος ανατροφοδότησης υπάρχει επίσης στο σύστημα ρύθμισης 1-2/2-1 του σχήματος 3(b). Ο τρίτος βρόχος ανατροφοδότησης προκαλεί δυο πιθανά προβλήματα:

1. Συνήθως αποσταθεροποιεί το σύστημα κλειστού βρόχου.
2. Δυσχεραίνει την βαθμονόμηση του ρυθμιστή.

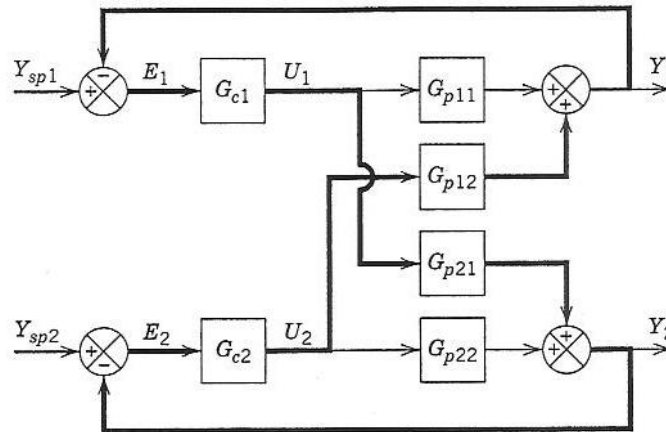
Ακολούθως θαδειχθεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς ανάμεσα σε μια μεταβλητή εκ χειρισμού και μια ρυθμιζόμενη μεταβλητή εξαρτάται από το αν είναι ανοιχτοί ή κλειστοί οι άλλοι βρόχοι ρύθμισης ανατροφοδότησης. Θεωρείστε το σύστημα ρύθμισης του σχήματος 3(a). Εάν ο ρυθμιστής για τον δεύτερο βρόχο G_{c2} είναι εκτός λειτουργίας ή έχει τεθεί σε χειροκίνητη λειτουργία με την έξοδο του ρυθμιστή να

είναι σταθερή στην ονομαστική της τιμή, τότε $U_2=0$. Για την περίπτωση αυτή, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ Y_1 και U_1 είναι απλά G_{p11} :

$$\frac{Y_1}{U_1} = G_{p11} \quad (\text{ο βρόχος μεταξύ } Y_2 \text{ και } U_2 \text{ είναι ανοικτός}) \quad (7)$$

Εάν και οι δυο βρόχοι είναι κλειστοί, τότε προστίθενται οι συνεισφορές και των δυο βρόχων στην Y_1 :

$$Y_1 = G_{p11}U_1 + G_{p12}U_2 \quad (8)$$



Σχήμα 4. Ο κρυφός βρόχος ρύθμισης (έντονη γραμμή) για 1-1/2-2 σύζευξη ρυθμιστών.

Ωστόσο, εάν ο δεύτερος ρυθμιστής ανατροφοδότησης είναι σε αυτόματη λειτουργία με $Y_{2sp}=0$, τότε, χρησιμοποιώντας την άλγεβρα διαγραμμάτων ροής,

$$Y_2 = \frac{G_{p21}U_1}{1 + G_{c2}G_{p22}} \quad (9)$$

Το σήμα από τον δεύτερο βρόχο προς τον πρώτο βρόχο είναι:

$$G_{p12}U_2 = -G_{p12}G_{c2}Y_2 \quad (10)$$

Εάν αντικαταστήσουμε το $G_{p12}U_2$ στην (8) χρησιμοποιώντας την (10) και έπειτα αντικαταστήσουμε το Y_2 βάσει της (9), τότε η συνολική συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου ανάμεσα στα Y_1 και U_1 είναι:

$$\frac{Y_1}{U_1} = G_{p11} - \frac{G_{p12}G_{p21}G_{c2}}{1 + G_{c2}G_{p22}} \quad (\text{ο βρόχος μεταξύ } Y_2 \text{ και } U_2 \text{ είναι κλειστός}) \quad (11)$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των Y_1 και U_1 εξαρτάται από τον ρυθμιστή για τον δεύτερο βρόχο G_{c2} . Παρομοίως, η συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ των Y_2 και U_2 εξαρτάται από το G_{c1} όταν ο πρώτος βρόχος είναι κλειστός. Αυτά τα αποτελέσματα έχουν σημαντικές επιπτώσεις στην βαθμονόμηση των ρυθμιστών

επειδή αποτελούν ένδειξη ότι οι δυο ρυθμιστές δεν θα έπρεπε να βαθμονομηθούν ανεξάρτητα.

Παράδειγμα 1

Θεωρήστε το ακόλουθο εμπειρικό μοντέλο μιας στήλης απόσταξης πιλοτικής κλίμακας:

$$\begin{bmatrix} x_D(s) \\ x_B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ S(s) \end{bmatrix} \quad (12)$$

όπου τα σύμβολα επεξηγούνται στο σχήμα 1(b). Υποθέστε ότι χρησιμοποιείται ένα σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων αποτελούμενο από δυο ρυθμιστές PI. Συγκρίνετε τις αλλαγές στα επιθυμητά σημεία κλειστού βρόχου που προκύπτουν αν επιλεγεί η σύζευξη X_D-R/X_B-S και:

- Γίνεται μια αλλαγή στο επιθυμητό σημείο σε κάθε βρόχο με τον άλλο βρόχο σε χειροκίνητη λειτουργία.
- Όταν γίνονται αλλαγές στο επιθυμητό σημείο οι ρυθμιστές βρίσκονται σε αυτόματη λειτουργία.

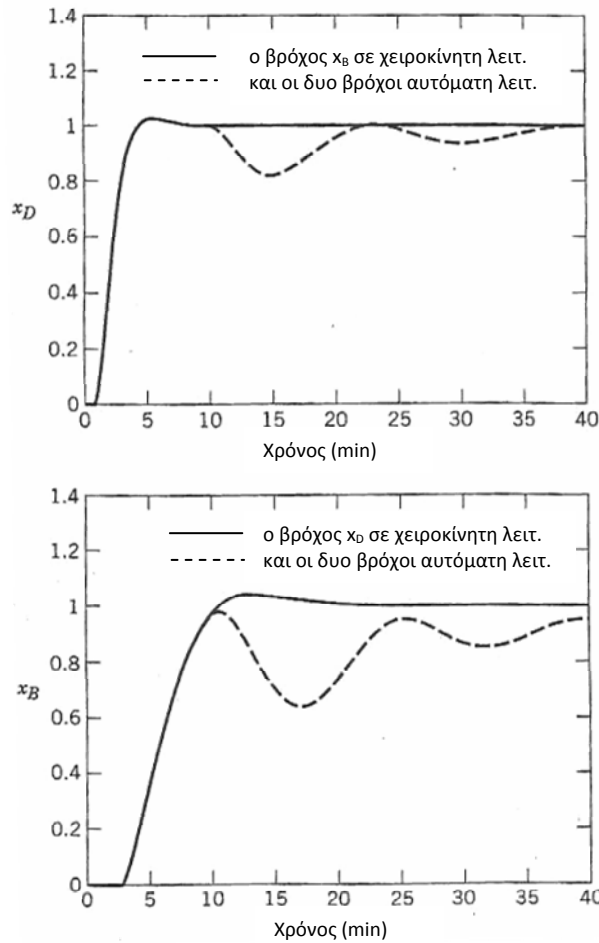
Υποθέστε ότι οι παράμετροι του ρυθμιστή βασίζονται στην μέθοδο βαθμονόμησης ITAE για τις αλλαγές στο επιθυμητό σημείο.

Σύζευξη ρυθμιστών	K_c	τ_i (min)
x_D-R	0.604	16.37
x_B-S	-0.127	14.46

Πίνακας 1. Βαθμονόμηση PI ρυθμιστών για το παράδειγμα 1.

Λύση

Ο πίνακας 1 δείχνει τις παραμέτρους των PI ρυθμιστών που έχουν βαθμονομηθεί με τη μέθοδο ITAE και το σχήμα 5 δείχνει αποτελέσματα προσομοίωσης προβλήματος μεταβολής της επιθυμητής τιμής για κάθε ρυθμιζόμενη μεταβλητή. Οι παράμετροι ITAE παρέχουν ικανοποιητικές αποκρίσεις για οποιοδήποτε βρόχο ρύθμισης όταν ο άλλος ρυθμιστής είναι σε χειροκίνητη λειτουργία (έντονη γραμμή στο σχήμα). Ωστόσο, όταν και οι δυο ρυθμιστές είναι σε αυτόματη λειτουργία, οι αλληλεπιδράσεις παράγουν αποκρίσεις με έντονη ταλάντωση ειδικά στην x_B (διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 5. Αποκρίσεις σε προβλήματα μεταβολής της επιθυμητής τιμής για το παράδειγμα 1 χρησιμοποιώντας βαθμονόμηση ITAE.

1.2 Ευστάθεια κλειστού βρόχου

Προκειμένου να εξεταστούν περαιτέρω οι συνέπειες των αλληλεπιδράσεων κλειστού βρόχου, θα ασχοληθούμε πάλι με το διάγραμμα ροής για την διάταξη ρύθμισης 1-1/2-2 του σχήματος 3(a), η οποία περιγράφεται από τις ακόλουθες συναρτήσεις μεταφοράς:

$$Y_1 = \Gamma_{11} Y_{sp1} + \Gamma_{12} Y_{sp2} \quad (13)$$

$$Y_2 = \Gamma_{21} Y_{sp1} + \Gamma_{22} Y_{sp2} \quad (14)$$

όπου:

$$\Gamma_{11} = \frac{G_{c1} G_{p11} + G_{c1} G_{c2} (G_{p11} G_{p22} - G_{p12} G_{p21})}{\Delta(s)} \quad (15)$$

$$\Gamma_{12} = \frac{G_{c2} G_{p12}}{\Delta(s)} \quad (16)$$

$$\Gamma_{21} = \frac{G_{c1}G_{p21}}{\Delta(s)} \quad (17)$$

$$\Gamma_{22} = \frac{G_{c2}G_{p22} + G_{c1}G_{c2}(G_{p11}G_{p22} - G_{p12}G_{p21})}{\Delta(s)} \quad (18)$$

και το $\Delta(s)$ ορίζεται ως:

$$\Delta(s) = (1 + G_{c1}G_{p11})(1 + G_{c2}G_{p22}) - G_{c1}G_{c2}G_{p12}G_{p21} \quad (19)$$

Δυο σημαντικά συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν από αυτές τις σχέσεις κλειστού βρόχου. Πρώτον, μια αλλαγή στο επιθυμητό σημείο στον ένα βρόχο προκαλεί αλλαγή και στις δυο ρυθμιζόμενες μεταβλητές επειδή τα Γ_{12} και Γ_{21} γενικά δεν είναι μηδενικά. Το δεύτερο συμπέρασμα αφορά στην ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου. Επειδή κάθε μια από τις τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς κλειστού βρόχου στις εξισώσεις (15) έως (18) έχει τον ίδιο παρανομαστή, η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\Delta(s)=0$, ή

$$(1 + G_{c1}G_{p11})(1 + G_{c2}G_{p22}) - G_{c1}G_{c2}G_{p12}G_{p21} = 0 \quad (20)$$

Επομένως, η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου εξαρτάται και από τους δυο ρυθμιστές G_{c1} και G_{c2} και από τις τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς της διεργασίας. Μια ανάλογη χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να ληφθεί από την διάταξη ρύθμισης 1-1/2-2 του σχήματος 3(b).

Για την ειδική περίπτωση όπου είτε $G_{p12}=0$ ή $G_{p21}=0$, η χαρακτηριστική εξίσωση στην εξίσωση 20 οδηγεί στην:

$$(1 + G_{c1}G_{p11})(1 + G_{c2}G_{p22}) = 0 \quad (21)$$

Για την περίπτωση αυτή, η ευστάθεια του συνολικού συστήματος απλά εξαρτάται από την σταθερότητα των δυο ξεχωριστών βρόχων ρύθμισης ανατροφοδότησης και των χαρακτηριστικών τους εξισώσεων.

$$1 + G_{c1}G_{p11} = 0 \quad \text{και} \quad 1 + G_{c2}G_{p22} = 0 \quad (22)$$

Σημειώστε ότι εάν είτε $G_{p12}=0$ ή $G_{p21}=0$, δεν κλείνει ο τρίτος βρόχος ρύθμισης ανατροφοδότησης του σχήματος 4. Για παράδειγμα, εάν $G_{p12}=0$, τότε ο δεύτερος βρόχος ρύθμισης δεν έχει καμιά επίδραση στην Y_1 , ενώ ο πρώτος βρόχος ρύθμισης αποτελεί πηγή διαταραχών για τον δεύτερο βρόχο μέσω της συνάρτησης μεταφοράς G_{p21} .

Η ανωτέρω ανάλυση έχει βασιστεί στην διάταξη ρύθμισης 1-1/2-2 του σχήματος 3(a). Μια παρόμοια ανάλυση και συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για την διάταξη ρύθμισης 1-2/2-1.

Παράδειγμα 2

Θεωρείστε μια διεργασία που μπορεί να περιγραφεί από τον πίνακα συνάρτησης μεταφοράς:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{10s+1} & \frac{1.5}{s+1} \\ \frac{1.5}{s+1} & \frac{2}{10s+1} \end{bmatrix}$$

Υποθέστε ότι χρησιμοποιούνται δυο ρυθμιστές αναλογικής ανατροφοδότησης έτσι ώστε $G_{c1} = K_{c1}$ και $G_{c2} = K_{c2}$. Καθορίστε τις τιμές των K_{c1} και K_{c2} που οδηγούν σε ευστάθεια κλειστού βρόχου και για τις δυο διατάξεις, 1-1/2-2 και 1-2/2-1.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση για το σύστημα κλειστού βρόχου προκύπτει με αντικατάσταση στην εξίσωση (20) και αναδιάταξη σε δυνάμεις του s ως εξής:

$$\alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0 \quad (23)$$

όπου:

$$\alpha_4 = 100$$

$$\alpha_3 = 20K_{c1} + 20K_{c2} + 220$$

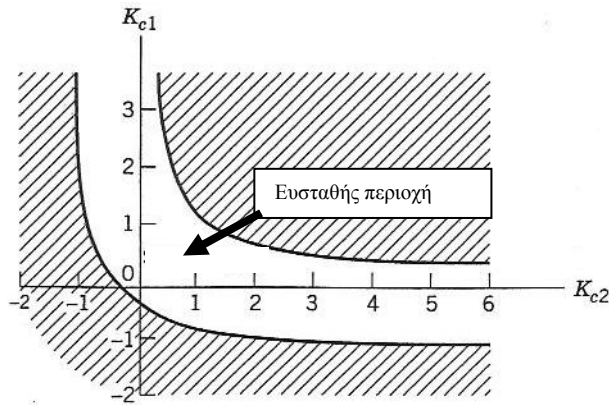
$$\alpha_2 = 42K_{c1} + 42K_{c2} - 221K_{c1}K_{c2} + 141$$

$$\alpha_1 = 24K_{c1} + 24K_{c2} + 8K_{c1}K_{c2} + 22$$

$$\alpha_0 = 2K_{c1} + 2K_{c2} + 1.75K_{c1}K_{c2} + 1$$

Προσέξτε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση στην (23) είναι τετάρτης τάξης, παρόλο που κάθε ξεχωριστή συνάρτηση μεταφοράς είναι πρώτης τάξης.

Οι τιμές ενίσχυσης του ρυθμιστή που οδηγούν σε ένα ευσταθές σύστημα κλειστού βρόχου μπορούν να καθοριστούν εφαρμόζοντας το κριτήριο ευστάθειας Routh για συγκεκριμένες τιμές των K_{c1} και K_{c2} . Οι περιοχές ευστάθειας που προκύπτουν φαίνονται στο σχήμα 6. Εάν κάποιο από τα K_{c1} και K_{c2} είναι κοντά στο μηδέν, η ενίσχυση του άλλου ρυθμιστή μπορεί να είναι μια οσοδήποτε μεγάλη θετική τιμή και το σύστημα κλειστού βρόχου να εξακολουθεί να είναι ευσταθές. Αυτό είναι συνέπεια της παρουσίας συναρτήσεων μεταφοράς της διεργασίας που είναι πρώτης τάξης χωρίς χρονική καθυστέρηση, που είναι η ιδεατή περίπτωση.

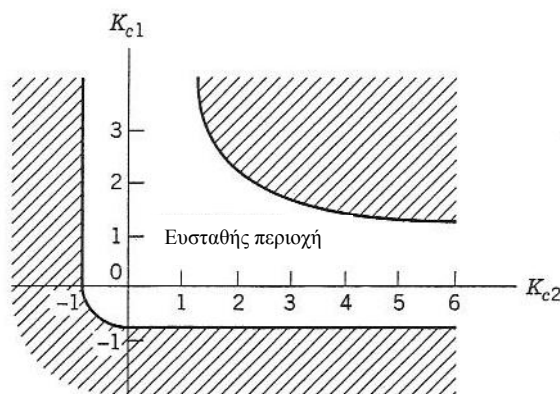


Σχήμα 6. Περιοχή ευστάθειας για το παράδειγμα 2 με σύζευξη ρυθμιστών 1-1/2-2.

Μια παρόμοια ανάλυση ευστάθειας μπορεί να γίνει στην διάταξη ρύθμισης 1-2/2-1. Οι υπολογιζόμενες περιοχές ευστάθειας φαίνονται στο σχήμα 7. Μια σύγκριση των σχημάτων 6 και 7 δείχνει ότι η διάταξη ρύθμισης 1-2/2-1 οδηγεί σε ευρύτερη περιοχή ευστάθειας επειδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα μεγαλύτερο εύρος τιμών ενίσχυσης του ρυθμιστή. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $K_{c1}=2$. Τότε το σχήμα 6 δείχνει ότι η διάταξη ρύθμισης 1-1/2-2 θα είναι ευσταθής εάν:

$-0,9 < K_{c2} < 0,6$. Αντίθετα, το σχήμα 7 δείχνει ότι τα αντίστοιχα όρια ευστάθειας για την διάταξη 1-2/2-1 είναι: $-0,8 < K_{c2} < 2,2$.

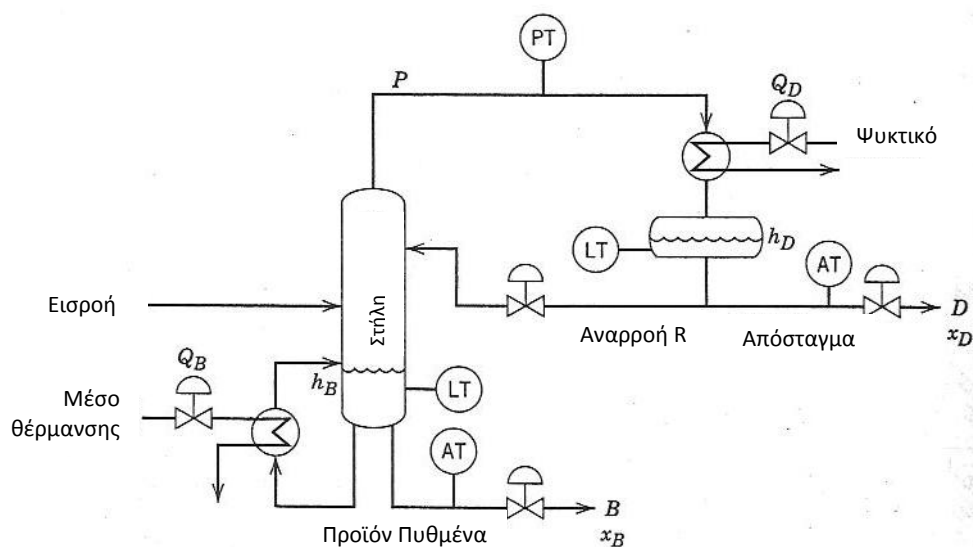
Αυτό το παράδειγμα δείχνει ότι η ευστάθεια κλειστού βρόχου εξαρτάται από την διάταξη ρύθμισης, αλλά και από τις τιμές των παραμέτρων του ρυθμιστή. Εάν είχε χρησιμοποιηθεί ρύθμιση PI αντί για μόνο αναλογική ρύθμιση, η ανάλυση ευστάθειας θα ήταν πολύ περίπλοκη λόγω του μεγάλου αριθμού των παραμέτρων του ρυθμιστή και την υψηλή τάξη της χαρακτηριστικής εξίσωσης.



Σχήμα 7. Περιοχή ευστάθειας για το παράδειγμα 2 με σύζευξη ρυθμιστών 1-2/2-1.

2. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΖΕΥΓΩΝ ΡΥΘΜΙΖΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ – ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΚ ΧΕΙΡΙΣΜΟΥ

Σε αυτό το κεφάλαιο, εξετάζουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού ζευγών ρυθμιζόμενων μεταβλητών - μεταβλητών εκ χειρισμού στην περίπτωση ρύθμισης πολλαπλών βρόχων. Μια λανθασμένη επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε ανεπαρκή απόδοση του συστήματος ρύθμισης και μειωμένα περιθώρια ευστάθειας, όπως συνέβη στην σύζευξη 1-1/2-2 του παραδείγματος 2. Σαν παράδειγμα θα χρησιμοποιηθεί η αποστακτική στήλη του σχήματος 8. Μια τυπική αποστακτική στήλη έχει πέντε πιθανές ρυθμιζόμενες μεταβλητές και πέντε μεταβλητές εκ χειρισμού. Οι ρυθμιζόμενες μεταβλητές του σχήματος 8 είναι οι συστάσεις x_D και x_B για τα δύο ρεύματα εξόδου των προϊόντων, η πίεση της αποστακτικής στήλης P , και οι στάθμες των υγρών h_D στο δοχείο αναρροής και h_B στην βάση της στήλης. Οι πέντε μεταβλητές εκ χειρισμού είναι οι ροές των ρευμάτων εξόδου των προϊόντων D και B , ο ροή της αναρροής R , και τα θερμικά φορτία για τον συμπυκνωτήρα και τον αναβραστήρα, Q_D και Q_B . Τα θερμικά φορτία μεταβάλλονται μέσω των βανών ελέγχου των γραμμών του ατμού και του ψυκτικού. Εάν χρησιμοποιηθεί σύστημα ρύθμισης πολλαπλών βρόχων αποτελούμενο από πέντε ρυθμιστές ανατροφοδότησης, υπάρχουν $5!=120$ διαφορετικοί τρόποι ώστε να προκύψουν τα ζεύγη ρυθμιζόμενων μεταβλητών - μεταβλητών εκ χειρισμού. Μερικές από αυτές τις περιπτώσεις θα απορρίπτονταν αμέσως ως μη πρακτικές ή μη πραγματοποιήσιμες, για παράδειγμα, οποιοδήποτε σύστημα επιδιώκει να ρυθμίσει την στάθμη στην βάση της στήλης h_B μεταβάλλοντας την ροή του αποστάγματος D ή το θερμικό φορτίο Q_D . Ωστόσο, μπορεί να υπάρχουν πολλές εναλλακτικές λύσεις, οι οποίες να φαίνονται υποσχόμενες. Το ερώτημα που προκύπτει στην περίπτωση αυτή είναι ποια επιλογή είναι η πιο αποδοτική.



Σχήμα 8. Ρυθμιζόμενες μεταβλητές και μεταβλητές εκ χειρισμού για μια συνήθη αποστακτική στήλη.

Ακολούθως, θα παρουσιαστεί μια συστηματική προσέγγιση για τον καθορισμό του βέλτιστου ζεύγους των ρυθμιζόμενων μεταβλητών και των μεταβλητών εκ χειρισμού, την μέθοδο σχετικής ενίσχυσης.

2.1 Η μέθοδος πίνακα σχετικής ενίσχυσης (RGA) του Bristol

Η προσέγγισή αυτή απαιτεί μόνο πληροφορίες μόνιμης κατάστασης (τον πίνακα ενίσχυσης της διεργασίας, \mathbf{K}) και βασίζεται στην έννοια της *σχετικής ενίσχυσης*. Θεωρείστε μια διεργασία με n ρυθμιζόμενες μεταβλητές και n μεταβλητές εκ χειρισμού. Η σχετική ενίσχυση λ_{ij} ανάμεσα σε μια ρυθμιζόμενη μεταβλητή y_i και μια μεταβλητή εκ χειρισμού u_j καθορίζεται από την αδιάστατη αναλογία των δυο τιμών ενίσχυσης μόνιμης κατάστασης:

$$\lambda_{ij} \triangleq \frac{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_u}{\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_y} = \frac{\text{ενίσχυση ανοικτού βρόχου}}{\text{ενίσχυση κλειστού βρόχου}} \quad (24)$$

για $i=1, 2, \dots, n$ και $j=1, 2, \dots, n$.

Στην εξίσωση 24 ο όρος $\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_u$ υποδηλώνει μια μερική παράγωγο που υπολογίζεται κρατώντας όλες τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές εκτός της u_j σταθερές. Επομένως, ο όρος αυτός είναι η ενίσχυση ανοικτού βρόχου (ή ενίσχυση μόνιμης κατάστασης) ανάμεσα στις y_i και u_j , η οποία αντιστοιχεί στο στοιχείο του πίνακα ενίσχυσης της διεργασίας K_{ij} . Παρομοίως, ο όρος $\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_y$ υπολογίζεται κρατώντας όλες τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές εκτός της y_i σταθερές. Αυτή η κατάσταση θα μπορούσε να επιτευχθεί στην πράξη με την μεταβολή των τιμών των άλλων μεταβλητών εκ χειρισμού χρησιμοποιώντας ρυθμιστές με ολοκληρωτική συμπεριφορά. Επομένως, ο όρος $\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_y$ μπορεί να μεταφραστεί ως μια ενίσχυση κλειστού βρόχου η οποία δείχνει την επίδραση του u_j στο y_j όταν όλες οι άλλες ρυθμιζόμενες μεταβλητές ($y_i \neq y_j$) είναι σταθερές.

Οι σχετικές ενισχύσεις τοποθετούνται στον πίνακα σχετικής ενίσχυσης (*relative gain array*, RGA), που συμβολίζεται με Λ :

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (24)$$

Ο πίνακας RGA έχει μερικές σημαντικές ιδιότητες για τα μοντέλα διεργασιών σε μόνιμη κατάσταση:

1. Είναι κανονικοποιημένος επειδή το άθροισμα των στοιχείων σε κάθε σειρά ή στήλη είναι ίσο με 1.
2. Οι σχετικές ενισχύσεις είναι αδιάστατες και επομένως δεν επηρεάζονται από την επιλογή των μονάδων μέτρησης.
3. Ο πίνακας RGA είναι ένα μέτρο της ευαισθησίας στην αβεβαιότητα των στοιχείων στον πίνακα ενίσχυσης \mathbf{K} . Ο πίνακας ενίσχυσης μπορεί να γίνει μη αντιστρέψιμος εάν ένα μεμονωμένο στοιχείο K_{ij} μεταβληθεί ώστε: $K_{ij} = K_{ij}(1-1/\lambda_{ij})$. Επομένως ένα μεγάλο στοιχείο του RGA δείχνει ότι μικρές αλλαγές στο K_{ij} μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τα χαρακτηριστικά της ρύθμισης της διεργασίας.

2.2 Υπολογισμός του πίνακα σχετικής ενίσχυσης (RGA)

Οι σχετικές ενισχύσεις μπορούν να υπολογιστούν εύκολα είτε από τα δεδομένα μόνιμης κατάστασης ή από ένα μοντέλο της διεργασίας. Για παράδειγμα, θεωρήστε μια διεργασία 2X2 για την οποία είναι διαθέσιμο ένα μοντέλο μόνιμης κατάστασης. Υποθέστε ότι το μοντέλο έχει γραμμικοποιηθεί και έχει εκφραστεί σε όρους των μεταβλητών απόκλισης ως εξής:

$$y_1 = K_{11}u_1 + K_{12}u_2 \quad (26)$$

$$y_2 = K_{21}u_1 + K_{22}u_2 \quad (27)$$

όπου K_{ij} υποδηλώνει την ενίσχυση μόνιμης κατάστασης μεταξύ των y_i και u_j . Αυτό το μοντέλο μπορεί να εκφραστεί πιο σύντομα με συμβολισμό πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad (28)$$

Για ευσταθείς διεργασίες, το μοντέλο ενίσχυσης μόνιμης κατάστασης της εξίσωσης (28) σχετίζεται με το δυναμικό μοντέλο της (4) με την σχέση:

$$\mathbf{K} = G_p(0) = \lim_{s \rightarrow 0} G_p(s) \quad (29)$$

Ακολουθώντας, θα εξετάσουμε τον τρόπο υπολογισμού του λ_{11} . Προκύπτει από τις εξισώσεις (24) και (26) ότι

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \right)_{u_2} = K_{11} \quad (30)$$

Προτού υπολογιστεί το $(\partial y_1 / \partial u_1)_{y_2}$ από την (26), πρέπει να εξαλειφθεί το u_2 . Αυτό επιτυγχάνεται λύνοντας της (27) ως προς u_2 και κρατώντας το y_2 σταθερό στην ονομαστική του τιμή, $y_2=0$:

$$u_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}u_1 \quad (131)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας στην (26) προκύπτει:

$$y_1 = K_{11} \left(1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \right) u_1 \quad (32)$$

Επομένως

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial u_1} \right)_{u_2} = K_{11} \left(1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \right) \quad (33)$$

Από τις εξισώσεις (30) και (33) με αντικατάσταση στην (24) προκύπτει μια έκφραση για την σχετική ενίσχυση λ_{11} :

$$\lambda_{11} = \frac{1}{1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}} \quad (34)$$

Επειδή κάθε σειρά και κάθε στήλη του πίνακα Λ στην (25) έχει άθροισμα την μονάδα, οι άλλες σχετικές ενισχύσεις μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από το λ_{11} για την περίπτωση συστήματος 2x2:

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1 - \lambda_{11} \quad \text{και} \quad \lambda_{22} = \lambda_{11} \quad (35)$$

Επομένως, ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης RGA για ένα σύστημα 2X2 μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

όπου το σύμβολο λ τώρα χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει το λ_{11} . Προσέξτε ότι ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης για μια διεργασία 2X2 είναι πάντοτε συμμετρικός. Ωστόσο, αυτό δεν θα ισχύει απαραίτητα για διεργασίες με περισσότερες από 2 μεταβλητές εκ χειρισμού και ρυθμιζόμενες μεταβλητές ($n>2$).

Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης μπορεί να υπολογιστεί από την έκφραση

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K} \otimes \mathbf{H} \quad (36)$$

όπου \otimes υποδηλώνει το γινόμενο Schur (πολλαπλασιασμός στοιχείου με στοιχείο):

$$\lambda_{ij} = K_{ij} H_{ij} \quad (37)$$

όπου K_{ij} είναι το (i,j) στοιχείο του \mathbf{K} στην εξίσωση (28) και H_{ij} είναι το (i,j) στοιχείο του \mathbf{H} ώστε $\mathbf{H} = (\mathbf{K}^{-1})^T$, δηλαδή H_{ij} είναι το αντίστοιχο στοιχείο από τον αντίστροφο του αντίστροφου πίνακα του \mathbf{K} . Επειδή υπολογιστικά πακέτα όπως το MATLAB έχουν την δυνατότητα να εκτελούν πράξεις άλγεβρας πινάκων, η εξίσωση (37) μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Σημειώστε ότι η εξίσωση (36) δεν υπονοεί ότι $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K}(\mathbf{K}^{-1})^T$.

2.3 Μέθοδοι για τον υπολογισμό του πίνακα ενίσχυσης μόνιμης κατάστασης

Η εξίσωση (37) δείχνει πως μπορεί να υπολογιστεί ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης από ένα γραμμικοποιημένο μοντέλο διεργασίας μόνιμης κατάστασης με ενισχύσεις K_{ij} . Οι τιμές ενίσχυσης ανοιχτού βρόχου μπορούν να ληφθούν αριθμητικά από ένα μοντέλο προσομοίωσης ή απευθείας από πειραματικά δεδομένα. Για μια διεργασία πολλών μεταβλητών, μια είσοδος (u_1) μπορεί να υποστεί βηματική αλλαγή ενώ όλες οι άλλες εισοδοί παραμένουν σταθερές. Έπειτα παρατηρούνται οι αποκρίσεις για τα y_1, y_2, \dots παρατηρούνται. Όλοι οι βρόχοι κρατούνται ανοιχτοί κατά την διάρκεια αυτού του τεστ, δηλαδή δεν λειτουργεί κανένας ρυθμιστής ανατροφοδότησης. Στη συνέχεια γίνονται βηματικές αλλαγές στις άλλες εισόδους, μια κάθε φορά, και λαμβάνονται δεδομένα για την απόκριση ανοιχτού βρόχου για όλες τις ρυθμιζόμενες μεταβλητές. Η ενίσχυση μόνιμης κατάστασης εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή κάθε παραμέτρου y_i , από την οποία μπορεί να υπολογιστεί η αλλαγή Δy_i . Επομένως, οι μεμονωμένες ενισχύσεις της διεργασίας δίνονται από την εξίσωση:

$$K_{ij} = \frac{\Delta y_i}{\Delta u_j} \quad (38)$$

Για παράδειγμα, το K_{11} μπορεί να υπολογιστεί ως εξής: $K_{11} = \Delta y_1 / \Delta u_1$. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε οι ενισχύσεις να λαμβάνονται από ένα μαθηματικό μοντέλο (προσομοιωτής) είτε από πειράματα στην πραγματική διεργασία. Φυσικά, στην τελευταία περίπτωση, συνήθως απαιτούνται περισσότερη προσπάθεια και κόστος για να ληφθούν οι απαραίτητες πληροφορίες.

Για τον πειραματικό καθορισμό του K_{ij} είναι επίσης επιθυμητό να διενεργηθούν περισσότερα βηματικά τεστ για την ίδια είσοδο, χρησιμοποιώντας διαφορετικά πλάτη και διευθύνσεις για την αλλαγή της εισόδου και έπειτα να ληφθεί η μέση τιμή των αποτελεσμάτων. Όταν χρησιμοποιείται ένας προσομοιωτής, είναι ευκολότερο να

ελεγχθούν οι συνθήκες της προσομοιωμένης βηματικής αλλαγής και τα αποτελέσματα είναι λιγότερο επιρρεπή σε σφάλματα. Ωστόσο, δεν είναι υποχρεωτικό να υπάρχει ένας δυναμικός προσομοιωτής για τον υπολογισμό της ενίσχυσης.

2.4 Μέτρηση των αλληλεπιδράσεων και παρουσίαση μεθόδου αποσύζευξης

Η εξίσωση (32) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεξηγηθεί περαιτέρω ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης μιας διεργασίας 2x2. Υποθέτοντας ότι το y_2 διατηρείται σε επιθυμητή τιμή μηδέν με ρύθμιση κλειστού βρόχου, η αναδιάταξη της (32) δίνει:

$$\frac{y_1}{u_1} = K_{11} - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{22}} = K_{11} \left[1 - \frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}} \right] \quad (39)$$

Ο όρος $-K_{12}K_{21}/K_{11}K_{22}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας όρος αλληλεπίδρασης που τροποποιεί την ενίσχυση της διεργασίας ανοικτού βρόχου K_{11} εξαιτίας της επίδρασης του ρυθμιστή στον άλλο βρόχο (G_{c2}). Αυτή η επίδραση μπορεί να είναι θετική ή αρνητική, ανάλογα με τους λόγους των ενισχύσεων. Χρησιμοποιώντας την (34) σαν ορισμό του $\lambda_{11}=\lambda$, μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{y_1}{u_1} = K_{11} \left[\frac{1}{\lambda} \right] = K_{11} \left[1 + \frac{1-\lambda}{\lambda} \right] \quad (40)$$

Επομένως το λ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας διαιρέτης της ενίσχυσης ανοικτού βρόχου K_{11} , ή ο όρος $(1-\lambda)/\lambda$ είναι μια διόρθωση στην τιμή του K_{11} . Για παράδειγμα, αν $\lambda=1$, δεν υπάρχει διόρθωση στην ενίσχυση, και η ενίσχυση ανοικτού βρόχου είναι ίση με την ενίσχυση κλειστού βρόχου. Μια μεγάλη τιμή του λ σημαίνει ότι η είσοδος u_1 πλέον δεν έχει σημαντική επιρροή στην έξοδο y_1 , κάτι που θα μπορούσε να έχει σημαντικές συνέπειες στην λειτουργία του συστήματος κλειστού βρόχου. Αν η τιμή λ είναι αρνητική, η ενίσχυση κλειστού βρόχου αλλάζει πρόσημο, κάτι που δημιουργεί σημαντικές δυσκολίες στον σχεδιασμό του ρυθμιστή εάν κλείσει ο πρώτος βρόχος.

Για την διεργασία 2x2 της εξίσωσης (36) μπορούν να διακριθούν πέντε περιπτώσεις σχετικές με την τιμή του λ (υπενθυμίζεται ότι η ιδιοτιμή λ καθορίζει ολόκληρο τον πίνακα Λ επειδή το άθροισμα των στοιχείων του πίνακα σχετικής ενίσχυσης ισούται με την μονάδα για κάθε σειρά και κάθε στήλη):

1. $\lambda=1$. Στην περίπτωση αυτή, από την (24) προκύπτει ότι οι ενισχύσεις ανοικτού και κλειστού βρόχου μεταξύ y_1 και u_1 είναι ίσες. Στην ιδανική αυτή κατάσταση, το άνοιγμα ή το κλείσιμο του βρόχου 2 δεν έχει επίδραση στον βρόχο 1. Συνεπάγεται ότι το y_1 θα έπρεπε να συζευχθεί με το u_1 (πχ. να εφαρμοστεί διάταξη 1-1/2-2).

2. $\lambda=0$. Η εξίσωση (24) δείχνει ότι η ενίσχυση ανοικτού βρόχου μεταξύ y_1 και u_1 είναι μηδέν, και επομένως το u_1 δεν έχει καμία άμεση επίδραση στην y_1 . Επομένως, το u_1 θα έπρεπε να συζευχθεί με το y_2 και όχι με το y_1 (πχ. να εφαρμοστεί διάταξη 1-2/2-1).
3. $0<\lambda<1$. Για την εξίσωση (24), η ενίσχυση κλειστού βρόχου μεταξύ y_1 και u_1 είναι μεγαλύτερη από την ενίσχυση ανοικτού βρόχου. Μέσα σε αυτό το διάστημα τιμών, η αλληλεπίδραση ανάμεσα στους δυο βρόχους είναι μέγιστη όταν $\lambda=0.5$, το οποίο δείχνει ότι ο δεύτερος όρος στην εξίσωση (33) είναι ίσος με -1.
4. $\lambda>1$. Για την περίπτωση αυτή, το κλείσιμο του δεύτερου βρόχου μειώνει την ενίσχυση μεταξύ y_1 και u_1 . Επομένως, οι βρόχοι ρύθμισης αλληλεπιδρούν. Καθώς η ιδιοτιμή λ αυξάνεται, αυξάνεται και ο βαθμός αλληλεπίδρασης και γίνεται πιο έντονος καθώς $\lambda \rightarrow \infty$. Όταν η ιδιοτιμή λ έχει πολύ μεγάλη τιμή, είναι αδύνατο να ρυθμιστούν και οι δυο έξοδοι ανεξάρτητα.
5. $\lambda<0$. Όταν η ιδιοτιμή λ είναι αρνητική, τότε η ενίσχυση κλειστού βρόχου και η ενίσχυση ανοικτού βρόχου μεταξύ y_1 και u_1 έχουν διαφορετικό πρόσημο. Επομένως, το άνοιγμα ή το κλείσιμο του βρόχου 2 έχει αρνητική επίδραση στην συμπεριφορά του βρόχου 1 όπως ταλάντωση. Συνεπάγεται ότι το y_1 δεν θα έπρεπε να συζευχθεί με το u_1 . Για $\lambda<0$ οι βρόχοι ρύθμισης αλληλεπιδρούν προσπαθώντας ο ένας να αναιρέσει τις ενέργειες του άλλου, και το σύστημα κλειστού βρόχου μπορεί να γίνει ασταθές.

Βάσει αυτής της ανάλυσης, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η μεταβλητή y_1 θα έπρεπε να συζευχθεί με την u_1 μόνο εάν $\lambda \geq 0.5$ στον πίνακα σχετικής ενίσχυσης (RGA) για προβλήματα μεγέθους 2×2 . Αλλιώς, η y_1 θα έπρεπε να συζευχθεί με την u_2 . Αυτή η λογική μπορεί να επεκταθεί σε διεργασίες $n \times n$ χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα:

Σύσταση: Οι ρυθμιζόμενες μεταβλητές και οι μεταβλητές εκ χειρισμού πρέπει να συζευχθούν ώστε οι αντίστοιχες τιμές σχετικής ενίσχυσης που προκύπτουν να είναι θετικές και κατά το δυνατόν κοντά στην μονάδα.

Το σημείο αυτό είναι κατάλληλο για να γίνουν μερικά σχόλια για την μέθοδο του πίνακα σχετικής ενίσχυσης (RGA).

1. Η μέθοδος βασίζεται αποκλειστικά σε πληροφορίες μόνιμης κατάστασης. Η μέθοδος μπορεί να επεκταθεί λαμβάνοντας υπόψη τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος.
2. Εάν $\lambda=0$ ή $\lambda=1$, τουλάχιστον μια από τις τέσσερις ενισχύσεις πρέπει να είναι μηδέν σύμφωνα με την εξίσωση (34).
3. Εάν μια επιλογή ζευγών εισόδων-εξόδων σε μια διεργασία 2×2 οδηγεί σε μια αρνητική σχετική ενίσχυση, τότε το σύστημα κλειστού βρόχου θα παρουσιάζει αστάθεια είτε στο συνολικό σύστημα κλειστού βρόχου είτε στον βρόχο με την αρνητική σχετική ενίσχυση.

Παράδειγμα 3

Θεωρείστε το σύστημα ανάμιξης του σχήματος $I(a)$. Να εξαχθεί ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης και να προσδιοριστούν τα βέλτιστα ζεύγη μεταβλητών εκ χειρισμού – ρυθμιζόμενων μεταβλητών για τις ακόλουθες τιμές: $w=4$ lb/min και $x=0.4$.

Λύση

Υποθέτοντας τέλεια ανάμιξη, ένα μοντέλο διεργασίας μπορεί να εξαχθεί από τα ακόλουθα ισοζύγια μάζας μόνιμης κατάστασης:

$$\text{Συνολική μάζα:} \quad w = w_A + w_B \quad (41)$$

$$\text{Συστατικό A:} \quad xw = w_A \quad (42)$$

Αντικαθιστώντας την (41) στην (42) και αναδιατάσσοντας προκύπτει:

$$x = \frac{w_A}{w_A + w_B} \quad (43)$$

Ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης για το σύστημα ανάμιξης μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_A & w_B \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ x \end{matrix} & \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Η σχετική ενίσχυση λ μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (34) αφότου υπολογιστούν οι τέσσερις τιμές ενίσχυσης μόνιμης κατάστασης:

$$K_{11} = \left(\frac{\partial w}{\partial w_A} \right)_{w_B} = 1 \quad (44\alpha)$$

$$K_{12} = \left(\frac{\partial w}{\partial w_B} \right)_{w_A} = 1 \quad (44\beta)$$

$$K_{21} = \left(\frac{\partial x}{\partial w_A} \right)_{w_B} = \frac{w_B}{(w_A + w_B)^2} = \frac{1-x}{w} \quad (44\gamma)$$

$$K_{22} = \left(\frac{\partial x}{\partial w_B} \right)_{w_A} = \frac{-w_A}{(w_A + w_B)^2} = -\frac{x}{w} \quad (44\delta)$$

Αντικαθιστώντας στην (34) προκύπτει $\lambda=x$. Επομένως, ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης είναι:

$$\Lambda = w \begin{bmatrix} w_A & w_B \\ x & 1-x \\ x & 1-x \end{bmatrix}$$

Προσέξτε ότι τα βέλτιστα ζεύγη εξαρτώνται από την επιθυμητή σύσταση του προϊόντος x . Για $x=0.4$, η μεταβλητή w θα έπρεπε να συζευχθεί με την w_B και η x με την w_A . Επειδή όμως και οι τέσσερις τιμές σχετικής ενίσχυσης είναι κοντά στο 0.5, οι αλληλεπιδράσεις των βρόχων ρύθμισης θα είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Από την άλλη μεριά εάν $x=0.9$, η μεταβλητή w θα έπρεπε να συζευχθεί με την w_A και η x με την w_B . Στην περίπτωση αυτή, οι αλληλεπιδράσεις των βρόχων ρύθμισης θα είναι μικρές.

Παράδειγμα 4

Ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης για αποστακτική στήλη διωλιστηρίου που σχετίζεται με μια μονάδα υδρογονοπυρόλυσης (Hydrocracker) είναι ο εξής:

$$\Lambda = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.931 & 0.150 & 0.080 & -0.164 \\ -0.011 & -0.429 & 0.286 & 1.154 \\ -0.135 & 3.314 & -0.270 & -1.910 \\ 0.215 & -2.030 & 0.900 & 1.919 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (45)$$

Οι τέσσερις ρυθμιζόμενες μεταβλητές είναι οι συστάσεις των ρευμάτων κορυφής και πυθμένα (y_1, y_2) και των δυο πλαϊνών ρευμάτων (y_3, y_4). Οι μεταβλητές εκ χειρισμού είναι οι τέσσερις ρυθμοί ροής που αριθμούνται από την κορυφή της στήλης. Για παράδειγμα, ο ρυθμός ροής του ρεύματος κορυφής είναι u_1 . Βρείτε τα βέλτιστα ζεύγη μεταβλητών εκ χειρισμού – ρυθμιζόμενων μεταβλητών χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του πίνακα σχετικής ενίσχυσης.

Λύση

Για να καθοριστούν τα συνιστώμενα ζεύγη για τους ρυθμιστές, εντοπίζουμε τις θετικές σχετικές ενισχύσεις που είναι πλησιέστερα στην μονάδα σε κάθε σειρά και στήλη. Για τις σειρές, είναι εμφανές ότι οι συνιστώμενες συζεύξεις είναι: y_1-u_1 , y_2-u_4 , y_3-u_2 και y_4-u_3 . Παρατηρείστε ότι αυτή η επιλογή αναθέτει την u_2 στην y_3 αντί για την y_1 , παρόλο που η σχετική της ενίσχυση έχει τιμή 3,314 και είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Αυτή η επιλογή είναι απαραίτητη επειδή η σύζευξη οποιασδήποτε μεταβλητής με την y_3 αντιστοιχεί σε αρνητική σχετική ενίσχυση, κάτι που δεν είναι επιθυμητό. Οι σχετικές ενισχύσεις y_1-u_1 και y_4-u_3 είναι κοντά στην μονάδα, επομένως αυτές οι επιλογές είναι σαφείς.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ο πίνακας σχετικής ενίσχυσης μπορεί να υπολογιστεί από πληροφορίες μόνιμης κατάστασης. Για ολοκληρωτικές διεργασίες (φυσικούς ολοκληρωτές) όπως το σύστημα αποθήκευσης υγρών, δεν μπορούν να προσδιοριστούν μια ή περισσότερες ενισχύσεις σταθερής κατάστασης. Η ανάλυση πίνακα σχετικής ενίσχυσης γίνεται στην περίπτωση αυτή κατά τον συνήθη τρόπο εκτός από το ότι κάθε ρυθμιζόμενη μεταβλητή που προκύπτει ως έξοδος ολοκληρωτικού στοιχείου αντικαθίσταται από τον ρυθμό μεταβολής της. Επομένως, εάν η στάθμη υγρού h είναι ταυτόχρονα ρυθμιζόμενη μεταβλητή και η έξοδος ενός ολοκληρωτικού στοιχείου, τότε το h θα αντικατασταθεί από τον ρυθμό dh/dt στην ανάλυση πίνακα σχετικής ενίσχυσης..