ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ

ΘΕΜΑ 1:
Α) Υπολογίστε τους πόλους και τις μηδενικές θέσεις του πολυμεταβλητού συστήματος:

$$G(s)=\begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{9}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2:

Το σύστημα $G(s)=\frac{1}{s+4}$ ρυθμίζεται με αναλογικό ρυθμιστή K(s)=K>0. Να υπολογίσετε το εύρος τιμών του Κ που εξασφαλίζει στο σύστημα κλειστού βρόχου:
Α) Ονομαστική ευστάθεια
Β) Εύρωστη ευστάθεια όταν η πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εκφράζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς: $\frac{8}{s+4}$

ΘΕΜΑ 3:

Το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση μεταφοράς $\frac{140e^{-1/2s}}{5s+1}$ ρυθμίζεται με P-ρυθμιστή.
Υπολογίστε το συντελεστή ενίσχυσης ώστε το περιθώριο ενίσχυσης να είναι 9.

ΘΕΜΑ 4 : Δίνεται το σύστημα μιας μεταβλητής κατάστασης
$\dot{x}=x+u$
α) Υπολογίστε συντελεστή ανατροφοδότησης K, $u=-Kx$, ώστε να ελαχιστοποιείται η ακόλουθη αντικειμενική συνάρτηση $J=\int_0^\infty \left(qx^2(t)+ru^2(t)\right)dt$.

β) Θεωρήστε τώρα ότι η αρχική τιμή της μεταβλητής κατάστασης $x(0)$ είναι 1. Χρησιμοποιώντας πάλι το νόμο ελέγχου $u=-Kx$ να υπολογίσετε δύο συντελεστές ανατροφοδότησης: στην πρώτη περίπτωση να επιτυγχάνεται $x(1)=0.1$ και στη δεύτερη $x(1)=0.01$

ΘΕΜΑ 1.

Οι ορίζουσες 1x1 είναι:

$$\frac{s-1}{s+1},\ \frac{9}{s+1},\ \frac{1}{s+2},\ \frac{1}{s+2}$$

και η μοναδική ορίζουσα 2x2

$$\frac{s-1-9}{(s+1)(s+2)} = \frac{s-10}{(s+1)(s+2)}$$

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών είναι $(s+1)(s+2)$.

Άρα οι πόλοι είναι $-1, -2$

Ο μοναδικός υποπίνακας 2x2 είναι ο

$$\begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{9}{s+1} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$. Αντίστοιχη ορίζουσα $\frac{s-10}{(s+1)(s+2)}$

Ο παρονομαστής είναι το πολυώνυμο πόλων, άρα μηδενική θέση στο +10

Ερώτημα 2.

Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι

$$\frac{\frac{K}{s+4}}{1+\frac{K}{s+4}} = \frac{K}{s+4+K}$$

Προφανώς είναι ευσταθής αν $+4+K>0 \Rightarrow K>-4.$

Άρα $K>0$ (λόγω περιορισμών)

Η παραπάνω συνάρτηση μεταφοράς είναι η συνάρτηση καθοδήγησης T, Άρα πρέπει να ισχύει

$$\left| T(j\omega)\, W_I(j\omega) \right| < 1, \ \forall \omega \geq 0$$

$$\max_{\omega} \left| \frac{K}{(j\omega+4+K)} \, \frac{8}{(j\omega+4)} \right| < 1$$

$$\max_{\omega} \frac{8\,|K|}{\sqrt{(4+K)^2+\omega^2}\,\sqrt{\omega^2+16}} < 1$$

Προφανώς το max προκύπτει για $\omega=0$

Άρα $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}|K|}{|4+K|\cancel{4}} < 1$

$2K < 4+K$

$K <$ [illegible]

ΘΕΜΑ 3:

Συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου

$$L(s) = \frac{K\,140\,e^{-1/2 s}}{5s+1}$$

$$\angle L(j\omega) = -\frac{1}{2}\omega - \tan^{-1}(5\omega)$$

$$|L(j\omega)| = \frac{140K}{\sqrt{25\omega^2+1}}$$

Βρίσκουμε ω_{180} $\quad -\frac{1}{2}\omega - \tan^{-1}(5\omega) = -3.14$

$$\omega = 3.26\ \frac{rad}{s}$$ (με δοκιμή και σφάλμα)

$$\frac{K}{\sqrt{25\omega_{180}^2+1}} = \frac{1}{9} \Rightarrow K = 0{,}013$$

ΘΕΜΑ 4°:

α) Στο πρόβλημα LQR έχουμε $A=B=1$, $Q=q$, $R=r$

Η εξίσωση Riccati είναι

$$AP + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$$

$$P + P - \frac{P^2}{r} + q = 0$$

$$P^2 - 2Pr - rq = 0$$

$$P = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2+4r}}{2} = r \pm r\sqrt{1+\frac{q}{r}}$$

Από τις οποίες η μόνη θετική λύση είναι:

$$p = r\left(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}}\right)$$

Επομένως: $K = R^{-1}BP = \left(1+\sqrt{1+\frac{q}{r}}\right)$

b) $\dot{x} = x - kx = (1-k)x$

$$x(t) = e^{(1-k)t} x(0)$$

$$x(1) = e^{(1-k)} \cdot 1$$

$$\ln 0.1 = 1-k$$

$$-2.3 = 1-k$$

$$k = 1+2.3 = 3.3$$

$$\ln 0.01 = 1-k$$

$$-4.6 = 1-k$$

$$\Rightarrow k = 5.6$$