

# ΡΥΘΜΙΣΗ ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ (MODEL PREDICTIVE CONTROL, MPC)

## 1. Εισαγωγή στην Ρύθμιση Προβλεπτικού Μοντέλου

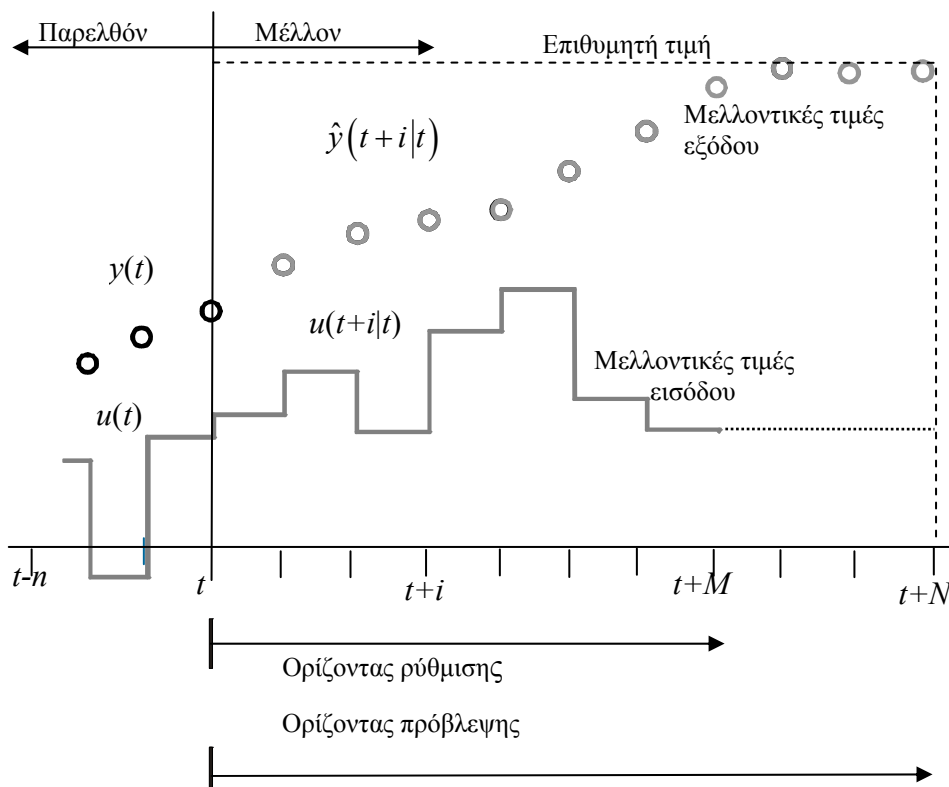
Ο όρος «ρύθμιση προβλεπτικού μοντέλου» (Model Predictive Control, MPC) αναφέρεται σε μια μεγάλη κατηγορία συστημάτων ρύθμισης που πρωτοεμφανίστηκαν στα τέλη της δεκαετίας του εβδομήντα. Έκτοτε, οι μεθοδολογίες MPC έχουν προσελκύσει το έντονο ενδιαφέρον της ακαδημαϊκής κοινότητας, αλλά ταυτόχρονα έχουν τύχει ευρείας αποδοχής και εφαρμογής στη βιομηχανία. Παρά το γεγονός ότι οι πρώτες εφαρμογές τους περιορίζονταν στην βιομηχανία πετρελαίου, σήμερα οι ρυθμιστές προβλεπτικού μοντέλου έχουν επεκταθεί στην χημική βιομηχανία, την αυτοκινητοβιομηχανία αλλά και την αεροπορική βιομηχανία (Qin & Badgwell, 2000; 2003).

Κοινό σημείο όλων των μεθοδολογιών MPC είναι η χρήση ενός μοντέλου για την πρόβλεψη των μεταβλητών εξόδου της διεργασίας, σε ένα πεπερασμένο μελλοντικό ορίζοντα (ορίζοντα πρόβλεψης). Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται για την διαμόρφωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης που ελαχιστοποιεί μία κατάλληλα επιλεγμένη αντικειμενική συνάρτηση. Μεταβλητές απόφασης αυτού του προβλήματος είναι οι μελλοντικές τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού, σε ένα εν γένει μικρότερο μελλοντικό χρονικό ορίζοντα, τον ορίζοντα ρύθμισης. Εφόσον η βέλτιστη αλληλουχία μελλοντικών ρυθμιστικών κινήσεων προσδιοριστεί, μόνο η πρώτη τιμή εφαρμόζεται τελικά στο σύστημα. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαμορφώνεται και επιλύεται εκ νέου την επόμενη χρονική στιγμή, αξιοποιώντας όλες τις νεότερες πληροφορίες για την διεργασία. Το Σχήμα 1.1 αναπαριστά την βασική ιδέα όλων των ρυθμιστών προβλεπτικού μοντέλου που περιγράφηκε προηγουμένως. Οι διαφορετικές μεθοδολογίες MPC που έχουν διαμορφωθεί, συνήθως έγκεινται στο γεγονός ότι εστιάζουν σε συγκεκριμένες κατηγορίες διεργασιών ή σε διαφορετικές διαμορφώσεις της αντικειμενικής συνάρτησης βελτιστοποίησης.

Η ρύθμιση προβλεπτικού μοντέλου παρουσιάζει μία σειρά από πλεονεκτήματα έναντι άλλων μεθόδων, από τα οποία τα κυριότερα είναι τα εξής:

- η περίπτωση πολυμεταβλητού συστήματος μπορεί να αντιμετωπισθεί με ευκολία.

- είναι πολύ χρήσιμη όταν η μελλοντική επιθυμητή συμπεριφορά του συστήματος (π.χ. ρομποτικοί βραχίονες) είναι εκ των προτέρων γνωστή
- είναι μία εξ'ολοκλήρου ανοιχτή μεθοδολογία βασισμένη σε συγκεκριμένες βασικές αρχές γεγονός που επιτρέπει μελλοντικές επεκτάσεις.
- λαμβάνει υπόψη τους νεκρούς χρόνους του συστήματος.
- μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ρύθμιση ενός μεγάλου φάσματος διεργασιών, που παρουσιάζουν είτε σχετικά απλή, είτε ιδιαίτερα πολύπλοκη δυναμική συμπεριφορά, συμπεριλαμβανομένων συστημάτων με μεγάλες χρονικές καθυστερήσεις ή αστάθειες.
- είναι ιδιαίτερα ελκυστική για χρήση από προσωπικό με περιορισμένη γνώση προχωρημένης ρύθμισης διότι οι αρχές της είναι απλές και ταυτόχρονα η βαθμονόμηση του ρυθμιστή είναι σχετικά εύκολη.
- ο ρυθμιστής που προκύπτει βασίζεται σε έναν εύκολα εφαρμόσιμο, γραμμικό κανόνα ρύθμισης.
- οι επεκτάσεις που αφορούν την εισαγωγή περιορισμών είναι θεωρητικά απλές και επιτρέπουν την συστηματική εισαγωγή τους κατά την διαδικασία σχεδιασμού



Σχήμα 1.1. Σχηματική αναπαράσταση ρυθμιστή προβλεπτικού μοντέλου

Ωστόσο υπάρχουν, όπως είναι αναμενόμενο και μερικά μειονεκτήματα που αφορούν κυρίως την εφαρμογή τους στην βιομηχανία. Καταρχήν, είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός μοντέλου που να αποδίδει την δυναμική της διεργασίας με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. Ο προσδιορισμός θεμελιωδών εξισώσεων, που να βασίζονται στην φυσική του συστήματος, συχνά δεν είναι εύκολος σε μία βιομηχανική μονάδα και επομένως είναι προτιμότερη η ανάπτυξη εμπειρικών μοντέλων, τα οποία ωστόσο πάντα συνοδεύονται από ένα σφάλμα. Επίσης, παρόλη την πρόοδο των υπολογιστικών συστημάτων, το πρόβλημα της υπολογιστικής ισχύος που απαιτείται για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης σε πραγματικό χρόνο είναι υπαρκτό, ιδιαίτερα στην περίπτωση χρήσης μη γραμμικών μοντέλων σε συνδυασμό με περιορισμούς. Εκτός του γεγονότος ότι απαιτείται η εύρεση λύσης που να ικανοποιεί τους περιορισμούς στο χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών εφαρμογών της μεθόδου, ιδιαίτερη σημασία έχει και η ποιότητα της λύσης για την καλή απόκριση του συστήματος (Camacho και Bordons, 1998; Rossiter, 2000).

## **2. Ιστορική αναδρομή στις μεθοδολογίες ρύθμισης προβλεπτικού μοντέλου**

Τα πρώτα άρθρα που εμφανίστηκαν στην βιβλιογραφία σχετικά με τους ρυθμιστές προβλεπτικού μοντέλου ήταν εφαρμογές τους στην βιομηχανία πετρελαίου. Οι Richalet *et al.* (1978) παρουσίασαν μια νέα μεθοδολογία ρύθμισης βιομηχανικών συστημάτων μεγάλης κλίμακας υπό την ονομασία Model Predictive Heuristic Control (MPHC) ή Model Algorithm Control (MAC) με εφαρμογές σε αποστακτικές στήλες (Richalet, 1993) και μονάδες καταλυτικής πυρόλυσης (FCC). Η μεθοδολογία συνίσταται στην αναγνώριση της μονάδας με πολυμεταβλητά μοντέλα Παλμικής επιβολής (Finite Impulse Response, FIR), τον προσδιορισμό μίας τροχιάς που να οδηγεί το σύστημα στην επιθυμητή τιμή και τον υπολογισμό των μεταβλητών εκ χειρισμού ώστε οι προβλέψεις των μεταβλητών εξόδου να ακολουθούν αυτή την τροχιά. Ο όρος ευρεστικός (Heuristic) χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς για να αποδώσει το γεγονός ότι ο ρυθμιστής αυτός δεν ήταν ούτε γραμμικός ούτε μπορούσε να περιγραφεί από μία συνάρτηση μεταφοράς.

Στις ίδιες αρχές βασίζεται και ο αλγόριθμος που παρουσίασαν δύο μηχανικοί της Shell (Cutler and Ramaker, 1979). Ο αλγόριθμος αυτός με την ονομασία Dynamic Matrix Control (DMC) αποτέλεσε ουσιαστικά τον απλούστερο αλλά ταυτόχρονα και πιο διαδεδομένο στην βιομηχανία ρυθμιστή προβλεπτικού μοντέλου. Τα βασικά σημεία του αλγορίθμου αυτού είναι η θεώρηση σταθερής επιθυμητής τιμής στον ορίζοντα πρόβλεψης (και όχι σε μορφή τροχιάς) και η παραδοχή ότι οι διαταραχές επίσης παραμένουν σταθερές καθ' όλη την διάρκεια του

ορίζοντα πρόβλεψης. Οι τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση μιας τετραγωνικής αντικειμενικής συνάρτησης που περιλαμβάνει την απόσταση των μεταβλητών εξόδου της διεργασίας από ένα προκαθορισμένο επιθυμητό σημείο λειτουργίας καθώς και τις μεταβολές των ίδιων των μεταβλητών εκ χειρισμού. Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν περιορισμοί (και την οποία συνήθως υποδηλώνει η ονομασία DMC) η λύση του προβλήματος βελτιστοποίησης μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, ανάγοντας την πολυπλοκότητα της εφαρμογής της DMC μεθοδολογίας σε αυτή ενός απλού γραμμικού ρυθμιστή. Σύγκριση των παραπάνω δύο μεθόδων, καθώς και παραλλαγών τους που αφορούν την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς παρουσιάστηκε στη δημοσίευση των Garcia *et al.* (1989).

Η μεθοδολογία Γενικευμένου Προβλεπτικού Ελέγχου (Generalized Predictive Control, GPC) παρουσιάστηκε αρχικά από τους Clarke *et al.* (1987a, 1987b). Παρόλο που η αρχική της διατύπωσή της περιορίζεται σε συστήματα μίας εισόδου-μίας εξόδου, θεωρείται (Camacho & Bordons, 1998) γενίκευση των περισσότερων μεθοδολογιών MPC καθώς προβλέπει την μοντελοποίηση και του στοχαστικού μέρους της διεργασίας (περιπτώσεις χρωματισμένου θορύβου). Στην περίπτωση του GPC, το μοντέλο πρόβλεψης των μεταβλητών εξόδου (επίσης γραμμικό) προκύπτει από την επίλυση μίας Diophantine εξίσωσης. Μεταξύ άλλων αξίζουν να σημειωθούν ο αλγόριθμος Inertial Matrix Control (IMA, Garcia & Morari, 1982; Garcia *et al.*, 1989) καθώς και η χρήση μοντέλων μεταβλητών κατάστασης που προτάθηκε από τους Lee *et al.* (1994). Το πλεονέκτημα της χρήσης μοντέλου μεταβλητών χώρου κατάστασης είναι ότι επιτρέπει την εύκολη επιλογή των παραμέτρων του ρυθμιστή έτσι ώστε να εξασφαλίζουν την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, βάση της προγενέστερης θεωρίας βέλτιστου έλεγχου.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί ένα από τα πλεονεκτήματα των μεθοδολογιών MPC είναι και η δυνατότητα χρήσης μη γραμμικών μοντέλων (Meadows & Rawlings, 1997). Ο Henson (1998) συγκεντρώνει μερικές από τις πρώτες εφαρμογές μη γραμμικών ρυθμιστών προβλεπτικού μοντέλου (NMPC). Διαχωρισμός των NMPC μπορεί καταρχήν να γίνει βάση του είδους του μη γραμμικού μοντέλου που χρησιμοποιούν. Έτσι μια πρώτη κατηγορία NMPC είναι αυτοί που χρησιμοποιούν τις θεμελιώδεις εξισώσεις διατήρησης μάζας, ορμής και ενέργειας διαμορφώνοντας έτσι ένα σύστημα μεταβλητών κατάστασης, μη γραμμικό στην γενική του μορφή (Allgöwer *et al.*, 2004). Ιδιαίτερα διαδεδομένα είναι όμως και τα εμπειρικά μη γραμμικά μοντέλα (Pearson and Ogunnaïke, 1997) υπό την γενική μορφή των Non linear Autoregressive Moving Average with Exogenous Inputs (NARMAX). Από τα πλέον δημοφιλή εμπειρικά μοντέλα για την δημιουργία διακριτών NMPC (Su & McAvoy, 1997) είναι τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα (Artificial Neural Networks, ANN). Τα νευρωνικά δίκτυα είναι εμπειρικά μαθηματικά μοντέλα που ανήκουν στις τεχνικές της τεχνητής

νοημοσύνης και η ανάπτυξή τους βασίζεται σε δεδομένα εισόδου και εξόδου του συστήματος που μοντελοποιείται. Μία εκτεταμένη ανασκόπηση της χρήσης νευρωνικών δικτύων σε μεθοδολογίες ρύθμισης και σε NMPC έχει δημοσιευτεί από τον Hussain (1999) ενώ ένα από τα πληρέστερα άρθρα που συνοψίζουν τις διάφορες μεθοδολογίες γραμμικών και μη γραμμικών ρυθμιστών MPC είναι των Morari and Lee (1999).

Εκτός από τις πάρα πολλές βιομηχανικές εφαρμογές ρυθμιστών προβλεπτικού μοντέλου σε διάφορες χημικές ή όχι διεργασίες (Qin & Badgwell, 2000; 2003), τα τελευταία χρόνια έχει παρουσιαστεί και σημαντική πρόοδος σε θεωρητικά θέματα που αφορούν την ονομαστική και εύρωστη ευστάθεια των γραμμικών και μη γραμμικών MPC (Allgöwer και Zheng, 2000). Μια πρόσφατη ανασκόπηση (Mayne *et al.*, 2000) συνοψίζει τις βασικότερες προτάσεις που έχουν παρουσιαστεί για την εξασφάλιση ευστάθειας σε μεθοδολογίες MPC διακριτού χρόνου, μεταξύ των οποίων είναι η εισαγωγή περιορισμών και η επιβολή ποινής στην τελική τιμή της μεταβλητής εξόδου στον ορίζοντα πρόβλεψης. Οι αντίστοιχες τροποποιήσεις για την ευστάθεια NMPC συνεχούς χρόνου συγκεντρώνονται στο άρθρο των Magni & Scattolini (2004).

Ένας από τους βασικούς παράγοντες που καθορίζουν την απόδοση των μεθόδων MPC είναι η ικανότητα του μοντέλου που χρησιμοποιούν (γραμμικό ή όχι) να αποδώσει τη δυναμική της διεργασίας. Ωστόσο, ακόμα και αν αυτό έχει επιτευχθεί σε ικανοποιητικό επίπεδο σε κάποια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, δεν είναι εξασφαλισμένη η επιτυχία του και στο μέλλον, αφού πρακτικά η δυναμική των περισσοτέρων διεργασιών δεν παραμένει σταθερή. Τυπικά παραδείγματα είναι η ύπαρξη διαταραχών που εισάγουν απότομες μεταβολές στη δυναμική του συστήματος ή η σταδιακή αλλαγή περιοχής λειτουργίας της διεργασίας, όπως για παράδειγμα η σταδιακή απενεργοποίηση ενός καταλύτη, η μείωση του ρυθμού μεταφοράς θερμότητας σε ένα εναλλάκτη λόγω αποθέσεων στα τοιχώματά του, κ.α.. Έτσι ήδη από τα πρώτα χρόνια χρήσης των μεθοδολογιών MPC δημιουργήθηκε η ανάγκη για μοντέλα που να μπορούν να προσαρμόζονται σε πραγματικό χρόνο στις αλλαγές της διεργασίας (Peterka, 1984). Μία από τις πρώτες εφαρμογές είναι επίσης αυτή των Morningred *et al.* (1992) που χρησιμοποιούν προσαρμοστικά γραμμικά και μη γραμμικά μοντέλα σε ένα αντιδραστήρα συνεχούς ροής πλήρους ανάδευσης (Continuous Stirred Tank Reactor, CSTR) και αξιολογούν την επίδραση των σφαλμάτων μοντελοποίησης. Επίσης, οι Matai και Saraf (1995) ανέπτυξαν ένα DMC αλγόριθμο με προσαρμοστικό μοντέλο για την ρύθμιση μίας αποστακτικής στήλης.

### 3. Στρατηγική Ρύθμισης Προβλεπτικού Μοντέλου

Οι μεθοδολογίες ρύθμισης προβλεπτικού μοντέλου χαρακτηρίζεται από την παρακάτω στρατηγική, δεδομένης της διαθεσιμότητας ενός δυναμικού μοντέλου διακριτού χρόνου:

1. Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή  $t$  διαμορφώνονται οι μελλοντικές αποκρίσεις του διανύσματος των μεταβλητών εξόδου για έναν συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα  $N$  (ορίζοντας πρόβλεψη)  $\hat{\mathbf{y}}(t+k|t)$ ,  $k=1,\dots,N$  χρησιμοποιώντας το δυναμικό μοντέλο διακριτού χρόνου ως μοντέλο πρόβλεψης. Οι αποκρίσεις αυτές εξαρτώνται από τις γνωστές τιμές των μεταβλητών εισόδου και εξόδου έως τη χρονική στιγμή  $t$  και από τις μελλοντικές τιμές του διανύσματος των μεταβλητών εκ χειρισμού  $\mathbf{u}(t+k|t)$ ,  $k=0,\dots,N-1$ . Οι τελευταίες είναι βεβαίως άγνωστες και αποτελούν τις μεταβλητές απόφασης στη διαμόρφωση του προβλήματος βελτιστοποίησης που περιγράφεται στο επόμενο βήμα.
2. Σε κάθε διακριτή χρονική στιγμή  $t$  διαμορφώνεται ένα πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού όπου η αντικειμενική συνάρτηση περιλαμβάνει τις διαφορές μεταξύ των προβλεπόμενων τιμών του διανύσματος των μεταβλητών εξόδου  $\hat{\mathbf{y}}(t+k|t)$ ,  $k=1,\dots,N$  και της επιθυμητής τροχιάς αναφοράς  $r(t+k)$ ,  $k=1,\dots,N$ , όπως επίσης και την ενέργεια ρύθμισης για τον μελλοντικό ορίζοντα ρύθμισης  $M$  (συνήθως επιλέγεται  $M < N$ ). Στο πρόβλημα βελτιστοποίησης περιλαμβάνονται επίσης και περιορισμοί που αφορούν στα διανύσματα εισόδου και εξόδου. Για παράδειγμα οι τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού δεν μεταβάλλονται μετά το πέρας του ορίζοντα ρύθμισης. Από την επίλυση του προβλήματος αυτού προκύπτουν οι βέλτιστες τιμές του διανύσματος των μεταβλητών εκ χειρισμού  $\mathbf{u}(t+k|t)$ ,  $k=0,\dots,M$ .
3. Η πρώτη τιμή του διανύσματος των μεταβλητών εκ χειρισμού  $\mathbf{u}(t|t)$  εφαρμόζεται για τη ρύθμιση του συστήματος, ενώ οι υπόλοιπες τιμές απορρίπτονται, διότι στην επόμενη χρονική στιγμή η τιμές του διανύσματος των μεταβλητών εξόδου  $\mathbf{y}(t+1)$  είναι ήδη γνωστές και το βήμα 1 επαναλαμβάνεται με την νέα αυτή τιμή, ενώ όλη η υπόλοιπη διαδικασία επαναλαμβάνεται εκ νέου. Αυτή είναι άλλωστε η βασική αρχή της μετατόπισης του χρονικού ορίζοντα στην οποία βασίζεται κατά μεγάλο μέρος η ρύθμιση προβλεπτικού μοντέλου.

## 4. Ρύθμιση Δυναμικού Μητρώου (Dynamic Matrix Control, DMC)

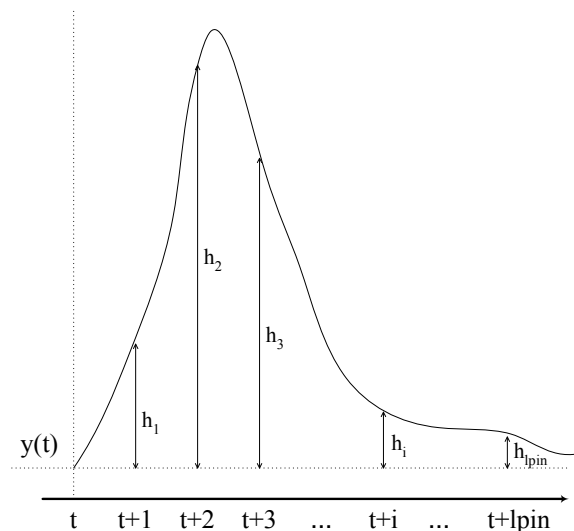
### 4.1 Δυναμικά μοντέλα παλμικής και βηματικής επιβολής

Είναι η πλέον δημοφιλής μεθοδολογία στη βιομηχανία επειδή είναι πολύ διαισθητική και απεικονίζει με σαφήνεια την επιρροή κάθε μεταβλητής εκ χειρισμού στο σήμα εξόδου. Πρέπει όμως να τονιστεί ότι η συγκεκριμένη μεθοδολογία εφαρμόζεται μόνο σε ευσταθή συστήματα ανοικτού βρόχου.

Η μεθοδολογία βασίζεται σε δυναμικά μοντέλα παλμικής ή βηματικής επιβολής. Ένα μοντέλο παλμικής επιβολής (γνωστό και ως Finite Impulse Response, FIR) συσχετίζει μια μεταβλητή εκ χειρισμού με μια μεταβλητή εξόδου σύμφωνα με τη σχέση:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \cdot u(t-i) \quad (4-1)$$

Οι συντελεστές  $h_i$  στο παραπάνω μοντέλο προκύπτουν πολύ απλά από την παρατήρηση της απόκρισης της μεταβλητής εξόδου όταν στην μεταβλητή εκ χειρισμού δοθεί μοναδιαία παλμική μεταβολή με χρόνο εφαρμογής ίσο με το χρόνο δειγματοληψίας που πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε. Συγκεκριμένα, οι τιμές  $h_i$  είναι οι τιμές της μεταβλητής εξόδου σε χρόνους πολλαπλάσιους του χρόνου δειγματοληψίας (σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Απόκριση σε παλμική επιβολή

Αφού σε ευσταθές σύστημα εφαρμόζεται ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια (το σήμα μετά από πεπερασμένο χρόνο επιστρέφει στην αρχική κατάσταση ισορροπίας) το ίδιο συμβαίνει

και με τη μεταβλητή εξόδου. Συνεπώς το παραπάνω άθροισμα αποτελείται ουσιαστικά από πεπερασμένο αριθμό όρων (έστω  $lpin$ ), οπότε θα έχουμε:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{lpin} h_i \cdot u(t-i) = H(z^{-1}) \cdot u(t) \quad (4-2)$$

όπου  $H(z^{-1}) = h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_N z^{-lpin}$ , και  $z^{-1}$  ο backward shift operator. Η παράμετρος  $lpin$  εκφράζει το πλήθος των πειραματικών τιμών απόκρισης της διεργασίας που χρησιμοποιούνται από το μοντέλο ώστε να δημιουργηθεί το προφίλ της μελλοντικής της συμπεριφοράς.

Η πρόβλεψη της τιμής της μεταβλητής εξόδου για ένα μελλοντικό χρονικό σημείο, θα δίνεται από την σχέση:

$$\hat{y}(t+k | t) = \sum_{i=1}^{lpin} h_i \cdot u(t+k-i | t) = H(z^{-1}) \cdot u(t+k | t) \quad (4-3)$$

Στην περίπτωση πολυμεταβλητού συστήματος, τα διαφορετικά σήματα εξόδου θα απεικονίζουν την επιρροή των  $nin$  σημάτων εισόδου σύμφωνα με την σχέση:

$$y_j(t) = \sum_{l=1}^{nin} \sum_{i=1}^{lpin} h_i^{lj} \cdot u^l(t-i) \quad (4-4)$$

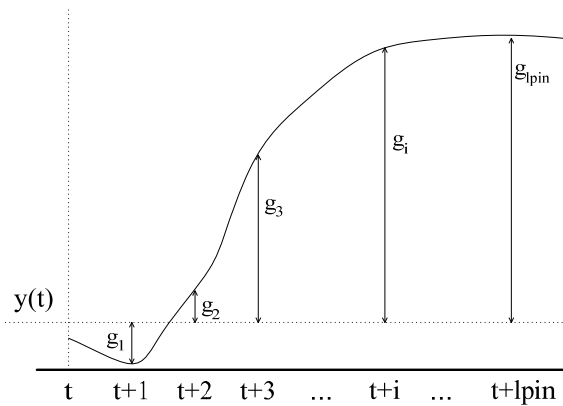
Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι εκτός από τους συντελεστές απόκρισης ( $h_i$ ) δεν απαιτούνται προηγούμενες πληροφορίες για την υπό εξέταση διεργασία, οπότε η διαδικασία αναγνώρισης της μελλοντικής συμπεριφοράς απλοποιείται και ταυτόχρονα περιγράφονται με ευκολία φαινόμενα όπως η χρονική καθυστέρηση.

Η ανάπτυξη μοντέλου βηματικής επιβολής είναι αντίστοιχη με αυτήν της παλμικής απόκρισης με την μόνη διαφορά ότι αυτή τη φορά το σήμα εισόδου είναι μία βηματική επιβολή. Ένα μοντέλο βηματικής επιβολής συσχετίζει μια μεταβλητή εκ χειρισμού με μια μεταβλητή εξόδου σύμφωνα με τη σχέση:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \cdot \Delta u(t-i) = G(z^{-1})(1-z^{-1})u(t) \quad (4-5)$$

Οι συντελεστές  $g_i$  στο παραπάνω μοντέλο προκύπτουν πολύ απλά από την παρατήρηση της απόκρισης της μεταβλητής εξόδου όταν στην μεταβλητή εκ χειρισμού δοθεί μοναδιαία βηματική επιβολή. Συγκεκριμένα, οι τιμές  $g_i$  είναι οι τιμές της μεταβλητής εξόδου σε χρόνους πολλαπλάσιους του χρόνου δειγματοληψίας (σχήμα 4.2), ενώ  $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$ .





**Σχήμα 4.2:** Απόκριση σε βηματική επιβολή

#### 4.2 Ανάπτυξη ρυθμιστή DMC με βάση μοντέλο παλμικής επιβολής

Οι βασικές αρχές για την ανάπτυξη του αλγορίθμου ελέγχου μέσω δυναμικού μητρώου εμπεριέχουν τα παρακάτω στοιχεία:

- το μοντέλο απόκρισης σε παλμική επιβολή
- μία δευτεροβάθμια αντικειμενική συνάρτηση σε ένα πεπερασμένο ορίζοντα πρόβλεψης
- μελλοντική συμπεριφορά της μεταβλητής εξόδου του συστήματος η οποία θα πρέπει να ακολουθεί όσο το δυνατό καλύτερα το σημείο αναφοράς
- ο υπολογισμός των απαραίτητων σημάτων εισόδου μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος ελαχίστων τετραγώνων

Ας θεωρήσουμε ότι μελετούμε την απλή περίπτωση ενός συστήματος που αποτελείται από μία είσοδο και μία έξοδο όπου το μοντέλο της διεργασίας περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\hat{y}(t+k|t) = \sum_{i=1}^{lpin} h_i \cdot u(t+k-1|t) + d(t+k|t) \quad (4-6)$$

Παρατηρούμε ότι σε σύγκριση με την εξίσωση 4-3 έχει προστεθεί ο όρος  $d(t+k|t)$  που παριστάνει τη διαταραχή. Με βάση αυτό το μοντέλο, μπορούμε να προβλέψουμε την τιμή της μεταβλητής εξόδου για ένα χρονικό ορίζοντα που αποτελείται από  $N$  χρονικά βήματα. Για την διαταραχή μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ίση με το παρόν σφάλμα πρόβλεψης για όλα τα μελλοντικά χρονικά βήματα. Δηλαδή να υποθέσουμε ότι η διαταραχή περιγράφεται από την εξίσωση:

$$d(t+k|t) = d(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \sum_{i=1}^{lpin} h_i \cdot u(t-i) \quad (4-7)$$

Για την καλύτερη κατανόηση της μεθόδου θα εργαστούμε σε συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων  $lpin, N, M$  (έστω  $lpin=4, N=6, M=2$ ) και ας θεωρήσουμε μια σταθερή επιθυμητή τιμή της μεταβλητής εξόδου  $y_{sp}$ . Το σφάλμα για τις επόμενες  $N$  χρονικές στιγμές θα δίνεται από το διάλυμα:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t+1|t) \\ \hat{e}(t+2|t) \\ \hat{e}(t+3|t) \\ \hat{e}(t+4|t) \\ \hat{e}(t+5|t) \\ \hat{e}(t+6|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1|t) - y_{sp} \\ \hat{y}(t+2|t) - y_{sp} \\ \hat{y}(t+3|t) - y_{sp} \\ \hat{y}(t+4|t) - y_{sp} \\ \hat{y}(t+5|t) - y_{sp} \\ \hat{y}(t+6|t) - y_{sp} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

Χρησιμοποιώντας το μοντέλο παλμικής μεταβολής καταλήγουμε στην εξής ισότητα πινάκων:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t+1|t) \\ \hat{e}(t+2|t) \\ \hat{e}(t+3|t) \\ \hat{e}(t+4|t) \\ \hat{e}(t+5|t) \\ \hat{e}(t+6|t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1+h_2 & h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 & h_1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 & h_1 & 0 & 0 \\ g_1+g_2+g_3+g_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 & h_1 & 0 \\ h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 & h_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \Delta u(t+3) \\ \Delta u(t+4) \\ \Delta u(t+5) \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

$$+ \begin{bmatrix} h_2 & h_3-h_2 & h_4-h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3 & h_4-h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ u(t-4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(t) - y_{sp} \\ y(t) - y_{sp} \\ y(t) - y_{sp} \\ y(t) - y_{sp} \\ y(t) - y_{sp} \\ y(t) - y_{sp} \end{bmatrix}$$

και ας υποθέσουμε ότι η τιμή της μεταβλητής εκ χειρισμού παραμένει σταθερή μετά το πέρας του ορίζοντα ρύθμισης δηλαδή

$$u(t+M+1) = u(t+M+2) = \dots = u(t+N-1) = u(t+M)$$

Η διαφορική:

$$\Delta u(t+M+1) = \Delta u(t+M+2) = \dots = \Delta u(t+N-1) = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να απομακρύνουμε τις στήλες  $(M+2, \dots, N)$  από τον πρώτο πίνακα στην εξίσωση 4-9, η οποία διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}(t+1|t) \\ \hat{e}(t+2|t) \\ \hat{e}(t+3|t) \\ \hat{e}(t+4|t) \\ \hat{e}(t+5|t) \\ \hat{e}(t+6|t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ h_1+h_2 & h_1 & 0 \\ h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 & h_1 \\ h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3 & h_1+h_2 \\ h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3 \\ h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 & h_1+h_2+h_3+h_4 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \Delta u(t+3) \\ \Delta u(t+4) \\ \Delta u(t+5) \end{bmatrix}}_{\Delta u} \quad (4-10)$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} h_2 & h_3-h_2 & h_4-h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3 & h_4-h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \\ h_2+h_3+h_4 & -h_2 & -h_3 & -h_4 \end{bmatrix}}_E \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u(t-1) \\ u(t-2) \\ u(t-3) \\ u(t-4) \end{bmatrix}}_u + \underbrace{\begin{bmatrix} y(t)-y_{sp} \\ y(t)-y_{sp} \\ y(t)-y_{sp} \\ y(t)-y_{sp} \\ y(t)-y_{sp} \\ y(t)-y_{sp} \end{bmatrix}}_D$$

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+M)} J$$

$$\text{όπου } J = \sum_{k=1}^N [w_k \cdot (\hat{y}(t+k|t) - y_{sp})]^2 + \sum_{k=0}^M (r_k \cdot \Delta u(k))^2 \quad (4-11)$$

Στην παραπάνω αντικειμενική συνάρτηση  $w_k$   $k=1, \dots, N$  και  $r_k$   $k=0, \dots, M$  είναι συντελεστές βάρους, οι οποίοι ομαδοποιούνται στους παρακάτω πίνακες:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_N \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & r_M \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

Η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι:

$$\Delta u = \left[ (W \cdot A)^T \cdot (W \cdot A) + R^T \cdot R \right]^{-1} \cdot (W \cdot A)^T \cdot W \cdot (-E \cdot U - D) \quad (4-13)$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος της εξίσωσης είναι σταθερό για κάθε χρονική στιγμή οπότε αρκεί να το υπολογίσουμε μία φορά δηλαδή:

$$\left[ (W \cdot A)^T \cdot (W \cdot A) + R^T \cdot R \right]^T \cdot (W \cdot A)^T \cdot W = \text{σταθερό} \quad (4-14)$$

Το δεύτερο μέρος μεταβάλλεται χρονικά με αποτέλεσμα να απαιτείται ο υπολογισμός του για κάθε χρονική στιγμή. Έτσι, υπολογίζοντας κάθε φορά την βέλτιστη τιμή του μητρώου:

$$\Delta u = \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

χρησιμοποιούμε μόνο το  $\Delta u(t)$  για να προσδιορίσουμε την παρούσα τιμή της μεταβλητής εκ χειρισμού από την σχέση:

$$u(t) = u(t-1) + \Delta u(t) \quad (4-16)$$

Η τιμή παραμένει σταθερή μέχρι το τέλος του χρόνου δειγματοληψίας. Στο χρονικό αυτό σημείο το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαμορφώνεται και επιλύεται εκ νέου.

Συνοψίζοντας, για την γενική περίπτωση, τα μητρώα του αλγορίθμου DMC θα έχουν την παραπάνω μορφή με τις διαστάσεις που δίνονται στον Πίνακα 4.1:

**Πίνακας 4.1:** Μητρώα αλγορίθμου DMC διεργασίας μίας εισόδου-μίας εξόδου

Μητρώο	Διαστάσεις
$A$	$N, (M+1)$
$\Delta u$	$(M+1), 1$
$E$	$N, lpin$
$U$	$lpin, 1$
$D$	$N, 1$
$W$	$N, N$
$R$	$M+1, M+1$

#### 4.3 Ανάπτυξη ρυθμιστή DMC για πολυμεταβλητό σύστημα

Στην περίπτωση πολυμεταβλητού συστήματος έχουμε ακριβώς την ίδια δομή του αλγόριθμου με τη μόνη διαφορά ότι οι τιμές των συντελεστών  $g$  ή  $h$  (βηματικής ή παλμικής απόκρισης αντίστοιχα) παύουν να είναι αριθμοί και γίνονται πίνακες της μορφής:

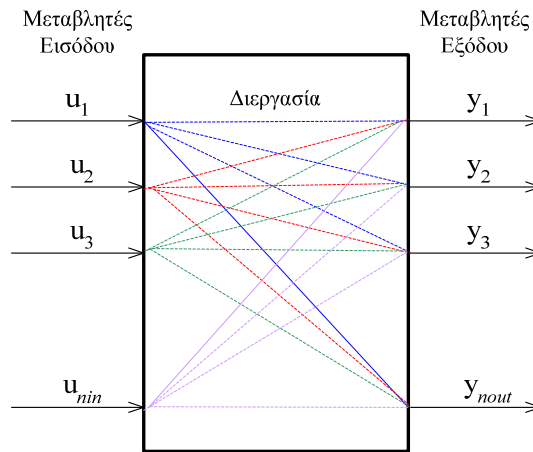
$$H_i = \begin{bmatrix} h_i^{1,1} & h_i^{1,2} & \dots & h_i^{1,nin} \\ h_i^{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_i^{nout,1} & \dots & \dots & h_i^{nout,nin} \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots lpin \quad (4-17)$$

όπου  $nin$ : πλήθος μεταβλητών εισόδου και  $nout$ : πλήθος μεταβλητών εξόδου.

Κάθε μεταβλητή εξόδου θα επηρεάζεται από κάθε μεταβλητή εισόδου μέσω του μοντέλου πρόβλεψης, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.3). Έτσι, το γινόμενο  $nin \cdot nout$  θα εκφράζει το πλήθος των εξισώσεων πρόβλεψης, δηλαδή για την  $i$  μεταβλητή εξόδου θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \hat{y}_j(t+k|t) = & h_1^{j,1} u_1(t+k-1) + h_2^{j,1} u_1(t+k-2) + \dots + h_{lpin}^{j,1} u_1(t+k-lpin) + \\ & h_1^{j,2} u_2(t+k-1) + h_2^{j,2} u_2(t+k-2) + \dots + h_{lpin}^{j,2} u_2(t+k-lpin) + \\ & \vdots \\ & h_1^{j,nin-1} u_{nin-1}(t+k-1) + h_2^{j,nin-1} u_{nin-1}(t+k-2) + \dots + h_{lpin}^{j,nin-1} u_{nin-1}(t+k-lpin) + \\ & h_1^{j,nin} u_{nin}(t+k-1) + h_2^{j,nin} u_{nin}(t+k-2) + \dots + h_{lpin}^{j,nin} u_{nin}(t+k-lpin) \end{aligned} \quad (4-18)$$

όπου  $j = 1, \dots, nout$



**Σχήμα 4.3:** Απεικόνιση πολυμεταβλητού συστήματος

#### 4.4 Εισαγωγή περιορισμών

Σκοπός μας είναι η εισαγωγή περιορισμών τόσο για τις τιμές των ρυθμιστικών δράσεων  $u$ , όσο και για τις τιμές των διαφορών των ρυθμιστικών δράσεων κατά την διάρκεια δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών  $\Delta u$ . Ο αλγόριθμος που αναφέρθηκε ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση  $J$  ως προς  $\Delta u$ , οπότε θεωρώντας μία ελάχιστη ( $u_{1,min}$ ) και μία μέγιστη τιμή ( $u_{1,max}$ ) για την μεταβλητή εισόδου 1 ( $u_1$ ) θα έχουμε:

$$u_{1,min} \leq u_1 \leq u_{1,max}$$

αλλά  $u_1 = u_1(k-1) + \Delta u_1(k)$  οπότε:

$$u_{1,\min} \leq u_1(k-1) + \Delta u_1(k) \leq u_{1,\max}$$

$$\text{δηλαδή: } \Delta u_1(k) \leq u_{1,\max} - u_1(k-1) \text{ και } -\Delta u_1(k) \leq u_1(k-1) - u_{1,\min} \quad (4-19)$$

Στην γενικότερη περίπτωση *nin* μεταβλητών εισόδου σχηματίζεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{aligned} \Delta u_1(k) &\leq u_{1,\max} - u_1(k-1) \\ -\Delta u_1(k) &\leq u_1(k-1) - u_{1,\min} \\ \Delta u_2(k) &\leq u_{2,\max} - u_2(k-1) \\ -\Delta u_2(k) &\leq u_2(k-1) - u_{2,\min} \\ &\vdots \\ \Delta u_{nin}(k) &\leq u_{nin,\max} - u_{nin}(k-1) \\ -\Delta u_{nin}(k) &\leq u_{nin}(k-1) - u_{nin,\min} \end{aligned} \quad (4-20)$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τις παραπάνω ανισώσεις για *nin* σήματα εισόδου και θεωρώντας ορίζοντα ρύθμισης έστω *p* καταλήγουμε σε μία γραμμική ανισότητα μητρώων της μορφής  $M \cdot x \leq b$  όπου:

$$x = \begin{bmatrix} \left\langle \begin{array}{c} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \\ \vdots \\ \Delta u_{nin}(k) \end{array} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \begin{array}{c} \Delta u_1(k+M+1) \\ \Delta u_2(k+M+1) \\ \vdots \\ \Delta u_{nin}(k+M+1) \end{array} \right\rangle \end{bmatrix} \text{ με διαστάσεις } nin \cdot (M+1), 1 \quad (4-21)$$

Συμπεριλαμβάνοντας λοιπόν την παραπάνω γραμμική ανισότητα μητρώων στο πρόβλημα αριστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης απαιτούμε την ελαχιστοποίηση της

$$J_{(\Delta U)} = (W \cdot Y_{(\Delta U)})^2 + (R \cdot \Delta U)^2 \text{ όταν } M \cdot x \leq b \quad (4-22)$$

Παράλληλα εισάγουμε τον περιορισμό:  $LB \leq x \leq UB$  όπου

$$LB = \left[ \begin{array}{c} \left\langle \Delta u_{1,\min} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{1,\min} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\min} \right\rangle \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left\langle \Delta u_{1,\min} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{1,\min} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\min} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\min} \right\rangle \end{array}} \right\} (M+1) \times nin \text{ και } UB = \left[ \begin{array}{c} \left\langle \Delta u_{1,\max} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{1,\max} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\max} \right\rangle \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} \left\langle \Delta u_{1,\max} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{1,\max} \right\rangle \\ \left\langle \Delta u_{2,\max} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \Delta u_{nin,\max} \right\rangle \end{array}} \right\} (M+1) \times nin \quad (4-23)$$

ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί για τις διαφορές των διαδοχικών ρυθμιστικών δράσεων. Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα παίρνει την μορφή ενός προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού, όπου θα πρέπει να μετασχηματίσουμε την  $J$  στην μορφή:

$$\frac{1}{2} \Delta U^T H \Delta U + f^T \Delta U + c_o \quad (4-24)$$

Το πρόβλημα παίρνει την ακόλουθη τελική του μορφή:

$$\min_{\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+M)} J = \frac{1}{2} \Delta U^T H \Delta U + f^T \Delta U + c_o, \quad M \cdot x \leq b, \quad LB \leq x \leq UB \quad (4-25)$$

όπου:

$$\begin{aligned} H &= A^T W^T W A + R^2 \\ f &= \frac{1}{2} (A^T W^T W E U + A^T W^T W W D) \\ c_o &= U^T E^T W^T W W U + U^T E^T W^T W D + D^T W^T W E U + D^T W^T W D \end{aligned} \quad (4-26)$$

## 5. Ρύθμιση Προβλεπτικού Μοντέλου χρησιμοποιώντας μοντέλο μεταβλητών κατάστασης διακριτού χρόνου

### 5.1. Διαμόρφωση του προβλήματος

Θεωρούμε ένα σύστημα που περιγράφεται από το παρακάτω γραμμικό, σταθερό ως προς το χρόνο μοντέλο:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5-1)$$

$$y(t) = Cx(t) + d(t) \quad (5-2)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^n$  είναι το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης,  $u \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα των μεταβλητών εκ χειρισμού,  $y \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα των μεταβλητών εξόδου και  $d \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα των διαταραχών που προστίθενται στη μεταβλητή εξόδου (προσέξτε ότι θεωρούμε τον ίδιο αριθμό μεταβλητών εκ χειρισμού και μεταβλητών εξόδου. Θεωρούμε επίσης ότι το σύστημα  $(A, B, C)$  είναι ρυθμίσιμο και παρατηρήσιμο και ότι όλες οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι διάφορες της μονάδας.

Εξετάζουμε το πρόβλημα όπου θέλουμε η έξοδος  $y(t)$  στην (5-2) να φτάσει σε μια επιθυμητή τιμή  $y_{sp} \in \mathbb{R}^m$  παρουσία της διαταραχής  $d(t)$ . Δηλαδή θέλουμε να επιτύχουμε μηδενική ρυθμιστική απόκλιση σε μόνιμη κατάσταση:

$$e_s \triangleq y_s - y_{sp} = Cx_s + d_s - y_{sp}. \quad (5-3)$$

Συμβολίζουμε με  $u_s, x_s, y_s$  και  $e_s$ , τις τιμές των αντίστοιχων διανυσμάτων στην επιθυμητή μόνιμη κατάσταση και το ίδιο συμβαίνει με τη διαταραχή  $d_s$ , δηλαδή,

$$d_s \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} d(t), \quad (5-4)$$

Τότε έχουμε:

$$e_s = 0 \quad (5-5)$$

$$y_s = y_{sp} = Cx_s + d_s \quad (5-6)$$

και επομένως



Από την εξίσωση (5-2), μπορούμε να γράψουμε σε μόνιμη κατάσταση  $x_s = Ax_s + Bu_s$  και επομένως:

$$x_s = (I - A)^{-1} Bu_s \quad (5-7)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5-6) έχουμε  $y_{sp} = C(I - A)^{-1} Bu_s + d_s$  από όπου προκύπτει:

$$u_s = [C(I - A)^{-1} B]^{-1} (y_{sp} - d_s), \quad (5-8)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε τον τρέχοντα χρόνο ως μηδενικό. Υποθέτουμε επίσης ότι η διαταραχή  $d(t)$  είναι γνωστή για  $t = 0, \dots, N - 1$  (όπου  $N$  είναι ο ορίζοντας πρόβλεψης) όπως επίσης και η τρέχουσα κατάσταση  $x(0) = x$  (Στην πράξη τις πληροφορίες αυτές τις λαμβάνουμε με χρησιμοποίηση κάποιου είδους παρατηρητή).

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε για το σύστημα (5-1)–(5-2), την αλληλουχία  $M$  ρυθμιστικών δράσεων  $\{u(0), \dots, u(M - 1)\}$ , την αντίστοιχη αλληλουχία καταστάσεων  $\{x(0), \dots, x(N)\}$  και την αλληλουχία σφαλμάτων  $\{e(0), \dots, e(N - 1)\}$ , που ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση πεπερασμένου ορίζοντα:

$$V_{N,M} \triangleq \frac{1}{2} (x(N) - x_s)^T P (x(N) - x_s) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} e(k)^T Q e(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} (u(k) - u_s)^T R (u(k) - u_s) \quad (5-9)$$

όπου  $P \geq 0$ ,  $Q \geq 0$  (θετικά ημιορισμένοι) και  $R > 0$  (θετικά ορισμένος). Στην (5-9), το  $N$  είναι ο ορίζοντας πρόβλεψης,  $M \leq N$ , είναι ο ορίζοντας ρύθμισης και τα  $u_s, x_s$  είναι οι επιθυμητές τιμές εισόδου (μεταβλητών εκ χειρισμού) και κατάστασης που δίνονται από τις εξισώσεις (7) και (8). Η μεταβλητή εκ χειρισμού εξισώνεται με την επιθυμητή τιμή σε μόνιμη κατάσταση μετά από  $M$  βήματα, δηλαδή,  $u(t) = u_s$  για κάθε  $t \geq M$ . Επίσης  $e(k) = y(k) - y_s$ ,  $k = 1, \dots, N$

Στην συνέχεια θα δείξουμε πως πραγματοποιείται η ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (5-9) υπό περιορισμούς στην είσοδο και την έξοδο.

Το παραπάνω πρόβλημα ελαχιστοποίησης καθορισμένου ορίζοντα λύνεται σε κάθε χρονικό βήμα για τις τρέχουσες τιμές κατάστασης και διαταραχής. Στη συνέχεια ως τρέχουσα τιμή ελέγχου χρησιμοποιείται η πρώτη δράση από την αλληλουχία τιμών ελέγχου που προκύπτει και η διαδικασία επαναλαμβάνεται στο επόμενο χρονικό βήμα.

## 5.2. Τετραγωνικός προγραμματισμός

Παρουσία γραμμικών περιορισμών στην είσοδο και την έξοδο, το πρόβλημα βελτιστοποίησης καθορισμένου χρόνου που περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού (quadratic programming, QP). Παρακάτω δείχνουμε πως επιτυγχάνεται αυτό.

Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας πώς μπορεί να μετατραπεί η (5-9) σε αντικειμενική συνάρτηση της μορφής που χρησιμοποιείται στον τετραγωνικό προγραμματισμό. Ξεκινάμε από την εξίσωση (5-1) με  $x(0) = x$  και χρησιμοποιώντας τον περιορισμό  $u(t) = u_s$  για  $t \geq M$ , προκύπτει εύκολα το σύνολο εξισώσεων που ακολουθεί:

$$\begin{aligned}x(1) &= Ax + Bu(0), \\x(2) &= A^2x + ABu(0) + Bu(1), \\&\vdots \\x(M) &= A^Mx + A^{M-1}Bu(0) + \dots + Bu(M-1), \\x(M+1) &= A^{M+1}x + A^M Bu(0) + \dots + ABu(M-1) + Bu_s, \\&\vdots \\x(N) &= A^N x + A^{N-1}Bu(0) + \dots + A^{N-M}Bu(M-1) + \sum_{i=0}^{N-M-1} A^i Bu_s.\end{aligned}\tag{5-10}$$

Χρησιμοποιώντας  $x_s = Ax_s + Bu_s$  επαναληπτικά, μπορούμε να γράψουμε ένα αντίστοιχο σύνολο εξισώσεων για το  $x_s$  όπως φαίνεται στην συνέχεια:

$$\begin{aligned}x_s &= Ax_s + Bu_s, \\x_s &= A^2x_s + ABu_s + Bu_s, \\&\vdots \\x_s &= A^Mx_s + A^{M-1}Bu_s + \dots + Bu_s, \\x_s &= A^{M+1}x_s + A^M Bu_s + \dots + ABu_s + Bu_s, \\&\vdots\end{aligned}\tag{5-11}$$

$$x_s = A^N x_s + A^{N-1} B u_s + \dots + A^{N-M} B u_s + \sum_{i=0}^{N-M-1} A^i B u_s .$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε από το σύνολο των εξισώσεων (11) το σύνολο των εξισώσεων (10) και γράφουμε την διαφορά που προκύπτει σε μορφή διανύσματος:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_s = \Gamma(\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) + \Omega(x - x_s), \quad (5-12)$$

όπου

$$\mathbf{x} \triangleq \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_s \triangleq \begin{bmatrix} x_s \\ x_s \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} \triangleq \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ u(M-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_s \triangleq \begin{bmatrix} u_s \\ u_s \\ \cdot \\ \cdot \\ u_s \end{bmatrix}, \quad (5-13)$$

(το  $\mathbf{x}_s$  είναι ένα  $nN \times 1$  διάνυσμα και το  $\mathbf{u}_s$  είναι ένα  $mM \times 1$  διάνυσμα), και όπου

$$\Gamma \triangleq \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ AB & B & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ A^{M-1}B & A^{M-2}B & \dots & AB & B \\ A^M B & A^{M-1}B & \dots & A^2 B & AB \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \dots & \dots & A^{N-M}B \end{bmatrix}, \quad \Omega \triangleq \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A^N \end{bmatrix}, \quad (5-14)$$

Ορίζουμε επίσης και το διάνυσμα διαταραχής

$$\mathbf{d} \triangleq [(d(1) - d_s)^T (d(2) - d_s)^T \dots (d(N-1) - d_s)^T \mathbf{0}_{1 \times m}]^T, \quad (5-15)$$

και τους πίνακες

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &\triangleq \text{diag}\{C^T Q C, \dots, C^T Q C, P\}, \\ \mathbf{R} &\triangleq \text{diag}\{R, \dots, R\}, \\ \mathbf{Z} &\triangleq \text{diag}\{C^T Q, C^T Q, \dots, C^T Q\}, \end{aligned} \quad (5-16)$$

όπου  $\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_p\}$ , υποδηλώνει έναν διαγώνιο πίνακα με στοιχεία διαγωνίου τους πίνακες  $A_i$ . Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε το σφάλμα σε κάθε χρονική στιγμή ως

$$e(k) = y(k) - y_s = Cx(k) + d(k) - (Cx_s + d_s) = C(x(k) - x_s) + (d(k) - d_s) \quad k = 1, \dots, N \quad (5-17)$$

Αντικαθιστούμε τώρα την (5-17) στην αντικειμενική συνάρτηση (5-9) και την ξαναγράφουμε χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση με διανύσματα (5-13), (5-15) και (5-16), όπως φαίνεται στη συνέχεια:

$$\begin{aligned} V_{N,M} = & \frac{1}{2} e(0)^T Q e(0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^T \mathbf{Q} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) + \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)^T \mathbf{R} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s) \\ & + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)^T \mathbf{Z} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \text{diag}\{Q, Q, \dots, Q\} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (5-18)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε την (5-12) στην (5-18) για να προκύψει

$$V_{N,M} = \bar{V} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\Gamma^T \mathbf{Q} \Gamma + \mathbf{R}) \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \Gamma^T \mathbf{Q} \Omega (x - x_s) - \mathbf{u}^T (\Gamma^T \mathbf{Q} \Gamma + R) \mathbf{u}_s + \mathbf{u}^T \Gamma^T \mathbf{Z} \mathbf{d} \quad (5-19)$$

Που μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\stackrel{\Delta}{=} \bar{V} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T H \mathbf{u} + \mathbf{u}^T [F(x - x_s) - H \mathbf{u}_s + D \mathbf{d}], \quad (5-20)$$

όπου το  $\bar{V}$  είναι ανεξάρτητο από το  $\mathbf{u}$  και

$$H = (\Gamma^T \mathbf{Q} \Gamma + \mathbf{R}), \quad F \triangleq \Gamma^T \mathbf{Q} \Omega, \quad D \triangleq \Gamma^T \mathbf{Z}. \quad (5-21)$$

Σημειώστε ότι το  $H$  στην (5-21) είναι θετικά ορισμένο γιατί έχουμε υποθέσει ότι στην αντικειμενική συνάρτηση (5-9) το  $R > 0$ .

Αν στο πρόβλημα δεν εισάγουμε περιορισμούς τότε η λύση στο πρόβλημα βελτιστοποίησης προκύπτει σε κλειστή μορφή ως εξής:

$$\mathbf{u}^{OPT}(x) \triangleq -H^{-1}[F(x - x_s) - H\mathbf{u}_s + D\mathbf{d}]. \quad (5-22)$$

Από τη λύση αυτή τα πρώτα  $m$  στοιχεία δίνουν τις βέλτιστες τιμές των μεταβλητών εκ χειρισμού την τρέχουσα χρονική στιγμή, οι οποίες και εφαρμόζονται στο σύστημα. Οι τιμές παραμένουν σταθερές μέχρι το τέλος του χρόνου δειγματοληψίας. Στο χρονικό αυτό σημείο το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαμορφώνεται και επιλύεται εκ νέου.

### 5.3. Εισαγωγή περιορισμών

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εισάγουμε ανισοτικούς περιορισμούς στην διαμόρφωση του προβλήματος. Οι περιορισμοί που αφορούν στις μεταβλητές εισόδου και εξόδου του συστήματος μπορούν να εκφραστούν από την παρακάτω ομάδα σχέσεων:

$$\begin{aligned} u_{\min} &\leq u(k) \leq u_{\max}, & k = 0, \dots, M-1, \\ y_{\min} &\leq y(k) \leq y_{\max}, & k = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5-23)$$

$$\delta u_{\min} \leq u(k) - u(k-1) \leq \delta u_{\max}, \quad k = 0, \dots, M-1,$$

Γενικότερα μπορεί να απαιτείται να επιβληθούν *περιορισμοί κατάστασης* της μορφής

$$x(k) \in X_k \quad \text{για } k = 1, \dots, N, \quad (5-24)$$

όπου  $X_k$  είναι ένα πολυεδρικό σύνολο της μορφής

$$X_k = \{x \in \mathbb{R}^n : L_k x \leq W_k\}. \quad (5-25)$$

Για παράδειγμα, ο περιορισμός  $x(N) \in X_f$ , όπου  $X_f$  είναι ένα σύνολο που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες, είναι χρήσιμος για την επίτευξη ευστάθειας κλειστού βρόγχου.

Οι περιορισμοί (5-23) - (5-25) μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί περιορισμοί στο  $\mathbf{u}$  με την μορφή

$$L\mathbf{u} \leq W, \quad (5-26)$$

όπου

$$L = \begin{bmatrix} I_{Mm} \\ \Psi \\ E \\ -I_{Mm} \\ -\Psi \\ -E \\ \tilde{L} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{y}_{\max} \\ \delta\mathbf{u}_{\max} \\ \mathbf{u}_{\min} \\ \mathbf{y}_{\min} \\ \delta\mathbf{u}_{\min} \\ \tilde{W} \end{bmatrix}. \quad (5-27)$$

Στην (5-27) το  $I_{Mm}$  είναι ένας  $Mm \times Mm$  μοναδιαίος πίνακας (όπου  $M$  είναι ο ορίζοντας ελέγχου και  $m$  είναι ο αριθμός των εισόδων). Το  $\Psi$  είναι ο παρακάτω  $(N-1)m \times Mm$  πίνακας:

$$\Psi = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{M-1}B & CA^{M-2}B & \dots & CAB & CB \\ CA^M B & CA^{M-1}B & \dots & CA^2 B & CAB \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots & \dots & CA^{N-M-1}B \end{bmatrix}.$$

ο  $E$  είναι ο παρακάτω  $Mm \times Mm$  πίνακας:

$$E = \begin{bmatrix} I_m & 0 & \dots & 0 \\ -I_m & I_m & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -I_m & I_m \end{bmatrix},$$

όπου  $I_m$  είναι ο  $m \times m$  μοναδιαίος πίνακας και

$$\tilde{L} \triangleq \text{diag}\{L_1, L_2, \dots, L_N\}\Gamma,$$

όπου  $L_1, \dots, L_N$  είναι πίνακες περιορισμών κατάστασης που δίνονται στην (5-25) και το  $\Gamma$  δίνεται από την (5-14).

Τα διανύσματα που διαμορφώνουν το  $W$  στην (5-27) είναι τα παρακάτω

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\max} &= \begin{bmatrix} u_{\max} \\ \vdots \\ u_{\max} \end{bmatrix}, & \mathbf{u}_{\min} &= \begin{bmatrix} -u_{\min} \\ \vdots \\ -u_{\min} \end{bmatrix}, \\ \delta \mathbf{u}_{\max} &= \begin{bmatrix} u(-1) + \delta u_{\max} \\ \delta u_{\max} \\ \vdots \\ \delta u_{\max} \end{bmatrix}, & \delta \mathbf{u}_{\min} &= \begin{bmatrix} -u(-1) - \delta u_{\min} \\ -\delta u_{\min} \\ \vdots \\ -\delta u_{\min} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}_{\max} &= \begin{bmatrix} y_{\max} - CAx - d(1) \\ \vdots \\ y_{\max} - CA^M x - d(M) \\ y_{\max} - CA^{M+1} x - d(M+1) - CBu_s \\ \vdots \\ y_{\max} - CA^{N-1} x - d(N-1) - \sum_{i=0}^{N-M-2} CA^i Bu_s \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}_{\min} &= \begin{bmatrix} -y_{\min} + CAx + d(1) \\ \vdots \\ -y_{\min} + CA^M x + d(M) \\ -y_{\min} + CA^{M+1} x + d(M+1) + CBu_s \\ \vdots \\ -y_{\min} + CA^{N-1} x + d(N-1) + \sum_{i=0}^{N-M-2} CA^i Bu_s \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{W} \triangleq -diag\{L_1, L_2, \dots, L_N\} \begin{bmatrix} Ax \\ \vdots \\ A^M x \\ A^{M+1}x + Bu_s \\ A^{M+2}x + ABu_s \\ \vdots \\ A^N x + \sum_{i=0}^{N-M-1} A^i Bu_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix},$$

όπου  $x$  είναι η αρχική κατάσταση,  $u_{\max}, u_{\min}, \delta u_{\max}, \delta u_{\min}, y_{\max}$  και  $y_{\min}$  είναι τα διανύσματα όπως καθορίζονται στην (5-23) και  $L_1, \dots, L_N, W_1, \dots, W_N$  είναι οι πίνακες και τα διανύσματα των πολυεδρικών περιορισμών κατάστασης (5-25).

### 2.3 Το πρόβλημα QP

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους, μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της (5-9) υπό τους ανισοτικούς περιορισμούς (5-23) - (5-25), ως QP πρόβλημα ελαχιστοποίησης της (5-20) υπό τους περιορισμούς (5-26), δηλαδή,

$$\min_{\mathbf{u}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T H \mathbf{u} + \mathbf{u}^T [F(x - x_s) - H \mathbf{u}_s + D \mathbf{d}]$$

υπό τον περιορισμό: (5-28)

$$L \mathbf{u} \leq W$$

Σημειώστε ότι ο όρος  $\bar{V}$  της (5-20) δεν έχει συμπεριληφθεί στην (5-28) επειδή είναι ανεξάρτητος του  $\mathbf{u}$ .

Η βέλτιστη λύση  $\mathbf{u}^{\text{opt}}(x)$  στην (5-28) είναι επομένως:

$$\mathbf{u}^{\text{opt}}(x) = \arg \min_{L \mathbf{u} \leq W} \frac{1}{2} \mathbf{u}^T H \mathbf{u} + \mathbf{u}^T [F(x - x_s) - H \mathbf{u}_s + D \mathbf{d}]. \quad (5-29)$$

Ο πίνακας  $H$  ονομάζεται Hessian του QP. Αν η Hessian είναι θετικά ορισμένη, το πρόβλημα QP είναι κυρτό. Πράγματι, αυτό ισχύει και για την  $H$  που δίνεται στην (5-21), η οποία, όπως έχει ήδη αναφερθεί, είναι θετικά ορισμένη γιατί έχουμε υποθέσει ότι  $R > 0$  στην αντικειμενική συνάρτηση (5-9).



## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Allgöwer F., Zheng A. (2000). *Nonlinear Model Predictive Control*. Birkhäuser, Berlin.
- Camacho E.F., Bordons C., (1998). *Model Predictive Control*. Springer-Verlag.
- Clarke D. W., Mohtadi C., Tuffs P. S., (1987a). Generalized Predictive Control-Part I: The Basic Algorithm. *Automatica*, vol. 23, pp. 137–148.
- Clarke D. W., Mohtadi C., Tuffs P. S., (1987b). Generalized Predictive Control-Part II: Extensions And Interpretations. *Automatica*, vol. 23, pp. 149–160.
- Cutler C. R., Ramaker B. L., (1979). Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm. AIChE 86th National Meeting. Houston, TX.
- Garcia E.C., Prett D.M., Morari M., (1989). Model Predictive Control Theory and Practice: A Survey. *Automatica*, vol. 25, no.3, 335-348.
- Garcia C. E., Morari, M. (1982). Internal Model Control—Part I: A Unifying Review And Some New Results. *Industrial Engineering Chemical Process Design and Development*, vol. 21, pp. 308–323.
- Henson M.A, (1998). Nonlinear Model Predictive Control: Current Status and Future Directions. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 23, pp.187-202.
- Hussain M.A., (1999). Review of the Applications of Neural Networks in Chemical Process Control-Simulation and Online Implementation. *Artificial Intelligence in Engineering*, vol. 13, pp. 55-68.
- Lee J., Morari M., Garcia C.E., (1994). State Space Interpretation of Model Predictive Control. *Automatica*, vol. 30, no. 4, pp. 707-717.
- Magni L., Scattolini R., (2004). Stabilizing Model Predictive Control of Nonlinear Continuous Time Systems. *Annual Reviews in Control*, vol. 28, pp. 1–11.
- Matai S., Saraf D., (1995). Adaptive dynamic matrix control of a distillation column with closed-loop online identification. *Journal of Process Control*, vol. 5, no. 5, pp. 315-327.
- Mayne D.Q., Rawling J.B., Rao C.V., Scokaert P.O.M., (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, vol. 36, pp. 789–814.
- Meadows W. S., Rawlings J.B., (1997). *Model Predictive Control*, in: Henson M.A., Seborg D. E. (Eds.), *Nonlinear Process Control*, Prentice Hall, New Jersey, pp. 233-303.
- Morari M., Lee J., (1999). Model Predictive Control: Past, Present and Future. *Computers and Chemical Engineering*, vol. 23, pp. 667-682.
- Morningred, J. D., Paden B. E., Seborg D. E., Mellichamp, D.A., (1992). An Adaptive Nonlinear Predictive Controller. *Chemical Engineering Science*, vol. 27, no. 4, pp. 755-762.
- Pearson R.K., Ogunnaike B.A., (1997). *Nonlinear Process Identification*. in: Henson M.A., Seborg D.E. (Eds.), *Nonlinear Process Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., pp. 11-110.
- Peterka V., (1984). Predictor Based Self Tuning Control. *Automatica*, vol. 20, no. 1, pp. 39-50.
- Qin J., Badgwell T., (2000). *An Overview of Nonlinear Model Predictive Control Applications*. in: Allgöwer F., Zheng A. (Eds.), *Nonlinear Model Predictive Control*, Birkhäuser, Berlin, pp. 369-392.
- Qin J., Badgwell T., (2003). A Survey of Industrial Model Predictive Control Technology. *Control Engineering Practice*, vol. 11, pp. 733-764.
- Richalet J., Rault A., Testud J.L., Papon J., (1978). Model Predictive Heuristic Control: Applications to Industrial Processes. *Automatica*, vol. 14, pp. 413-428.
- Richalet J. (1993). Industrial Applications of Model Based Predictive Control. *Automatica*, vol. 29, no. 5, pp. 1251-1274.
- Rossiter J.A., (2000). *Model Based Predictive Control: A practical approach*. CRS Press.
- Su H.T., McAvoy T.J., (1997). *Artificial Neural Networks for Nonlinear Process Identification and Control*. in: Henson M.A., Seborg D.E. (Eds.), *Nonlinear Process Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., pp. 371-428.

