Θέμα 1^o (30%)

Δίνεται το ακόλουθο σύστημα μεταβλητών κατάστασης:

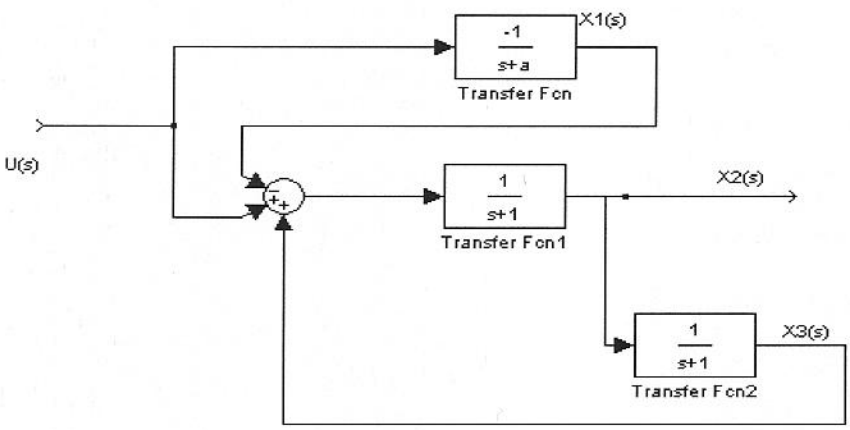
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

Υπολογίστε τις τιμές των στοιχείων του πίνακα **B** όταν γνωρίζετε ότι η χρησιμοποίηση του πίνακα ανατροφοδότησης **K**=[5 0] τοποθετεί τις ιδιοτιμές (πόλους) του συστήματος κλειστού βρόχου στα σημεία -2,-3.
Στη συνέχεια υπολογίστε τη μηδενική θέση της συνάρτησης μεταφοράς που αντιστοιχεί στο σύστημα ανοικτού βρόχου.

Θέμα 2^o (30%)

Δίνεται σύστημα μιας εισόδου-μιας εξόδου, που απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:
Α) Αναπτύξτε εξισώσεις κατάστασης, θεωρώντας σαν έξοδο τη μεταβλητή κατάστασης X2.
Β) Εξετάστε τη ρυθμισιμότητα και παρατηρησιμότητα του συστήματος συναρτήσει της παραμέτρου a.



Θέμα 3^o (40%)

Ένα σύστημα με δύο εισόδους και δύο εξόδους περιγράφεται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις:

$$\ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1 + \dot{u}_2$$

$$\ddot{y}_2 + 3y_2 - 3y_1 = u_2 + 2\dot{u}_1$$

Αναπτύξτε μοντέλο μεταβλητών κατάστασης για το παραπάνω σύστημα.
Υπόδειξη: Σχεδιάστε διάγραμμα βαθμίδων όπου τα μοναδικά δυναμικά στοιχεία είναι ολοκληρωτές

1. $G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{b_1 s + b_2}{s^2+1} \quad (1)$$

(Συνάρτηση μεταφοράς συστήματος ανοικτού βρόχου)

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5b_1 & 0 \\ 5b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5b_1 & 1 \\ -1-5b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A-BK) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5b_1 & 1 \\ -1-5b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5b_1 & -1 \\ +1+5b_2 & s \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου

$$s^2 + 5b_1 s + 1 + 5b_2$$

Αυτή πρέπει να συμπίπτει με

$$(s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$$

Άρα $5b_1 = 5 \Rightarrow \boxed{b_1 = 1}$, $5b_2 + 1 = 6 \Rightarrow \boxed{b_2 = 1}$

Απ: ii). (1) $s = -\dfrac{b_2}{b_1} \Rightarrow \boxed{s = -1}$

2.

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{-1}{s+a} \Rightarrow \dot{x}_1 + a x_1 = -u(t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -a x_1 - u(t)$$

Αντίστοιχα

$$\dot{x}_2 = -x_2 - x_1 + x_3 + u(t)$$

$$\dot{x}_3 = -x_3 + x_2$$

Το σύστημα των μεταβλητών κατάστασης είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Πίνακας Ρυθμιστικότητας

$$\begin{bmatrix} -1 & a & -a^3 \\ 1 & 0 & -a+1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσα διαφορετική του 0

$$\left(-1 \begin{vmatrix} 0 & -a+1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} a & -a^2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \neq 0$$

$$-a+1+a-a^2 \neq 0 \Rightarrow a^2 \neq 1$$

$$\boxed{a \neq 1,\ a \neq -1}$$

Πίνακας παρατηρησιμότητας

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

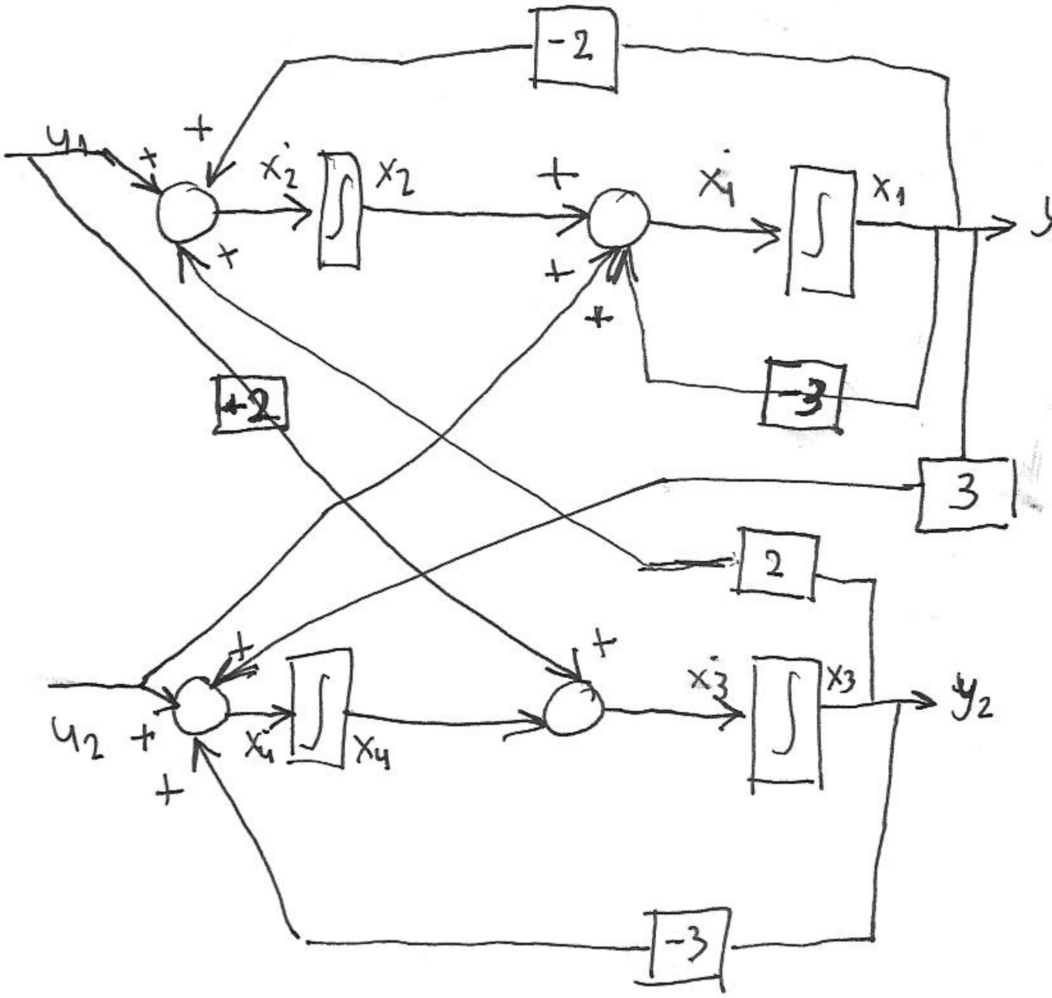
Ορίζουσα διαφορετική του 0

$$-1 \begin{vmatrix} -1 & a+1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{a \neq 1}$$

3.

$$y_1 = \int(u_2 - 3y_1) + \iint(u_1 - 2y_1 + 2y_2)$$

$$y_2 = \int(2u_1) + \iint(u_2 + 3y_1 - 3y_2)$$



$$\dot{x}_1 = x_2 + u_2 - 3x_1$$

$$\dot{x}_2 = u_1 - 2x_1 + 2x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4 + 2u_1$$

$$\dot{x}_4 = u_2 + 3x_1 - 3x_3$$

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$