Σχολή Χημικών Μηχανικών ΕΜΠ Προχωρημένη Ρευστομηχανική, $9^{ο}$ εξάμηνο 2024-2025

$1^{η}$ Σειρά Ασκήσεων, Ανάθεση 18/11/2024, Παράδοση 27/11/2024

1.Να αποδειχθεί:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det \begin{bmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{bmatrix}$$

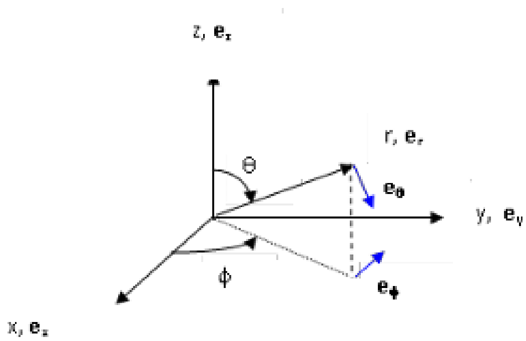
2. Να αποδειχθούν τα παρακάτω. f είναι βαθμωτή συνάρτηση, **A** είναι διάνυσμα.

$$\nabla\times(\nabla f)\equiv \mathbf{0}$$

$$\nabla\cdot(\nabla f)\equiv\nabla^2 f\equiv\triangle f$$

$$\nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{A})\equiv\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

3. Για το μετασχηματισμό από καρτεσιανές, (x,y,z) σε σφαιρικές συντεταγμένες, (r,θ,φ), εφαρμόζουμε τις ακόλουθες σχέσεις: $x = rsin\theta\cos\varphi$, $y = rsin\theta sin\varphi$, $z = rcos\theta$, με $\theta \in [0,\pi]$ και $\varphi \in [0,2\pi]$.



(α) Δείξτε ότι:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial(v_\theta sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi},$$

όπου $\boldsymbol{v}$ διάνυσμα.

(β) Έστω $\boldsymbol{r}$ το διάνυσμα θέσης στον τριδιάστατο χώρο. Δείξτε ότι:

$$\int_{S_R}\boldsymbol{rr}dS = \frac{4\pi R^4}{3}\boldsymbol{I},$$

όπου S_R: σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R, και $\boldsymbol{I}$: ο μοναδιαίος τανυστής δεύτερης τάξης